TD du Chapitre 2 : Fonctions usuelles

Exercice 1

Résoudre les systèmes :

a. $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 15 \\ e^x e^y e^z = e^6 \\ \ln(3^x 3^y) = \ln(3^z) \end{cases}$ b. $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2 \times 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases}$ c. $\begin{cases} \ln(2xy) = \ln(x)\ln(y) \\ \ln(yz) = \ln(y)\ln(z) \\ \ln(2zx) = \ln(z)\ln(x) \end{cases}$

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tels que :

$$\log_b a + \log_c a = 2 \log_b a \log_c a .$$

Exercice 3

Etudier les fonctions :

a. $f : x \mapsto (\ln x)^{\ln x}$ b. $g : x \mapsto \dfrac{e^{5x} + e^{-x}}{e^{4x} - 1}$ c. $h : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$

Exercice 4

Montrer que les fonctions hyperboliques réciproques peuvent s'exprimer à l'aide de ln.

Exercice 5

Montrer que $\forall\, x \neq 0$, $\operatorname{th} x = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle I à déterminer.
2) Représenter les courbes de f et f^{-1}.
3) Montrer que $\forall\, y \in I$, $\operatorname{ch}\left(f^{-1}(y)\right) = \dfrac{1}{y}$ et $\operatorname{sh}\left(f^{-1}(y)\right) = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$.
4) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}, ainsi que sa dérivée.

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\mathrm{sh}^2 x \cos^2 y + \mathrm{ch}^2 x \sin^2 y$ b. $\mathrm{ch}^2 x \cos^2 y + \mathrm{sh}^2 x \sin^2 y$.

Exercice 8

Etudier les fonctions :

a. $x \mapsto \arccos\left(\cos(3x)\right)$ b. $x \mapsto \sin\left(2\arctan x\right)$.

Exercice 9

1) Prouver que $\forall\, x \neq 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \mathrm{sgn}(x)\dfrac{\pi}{2}$ où $\mathrm{sgn}(x)$ désigne le signe de x.

2) Montrer que $\forall\, a \in \mathbb{R}$ et $\forall\, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab \neq 1$, on a :

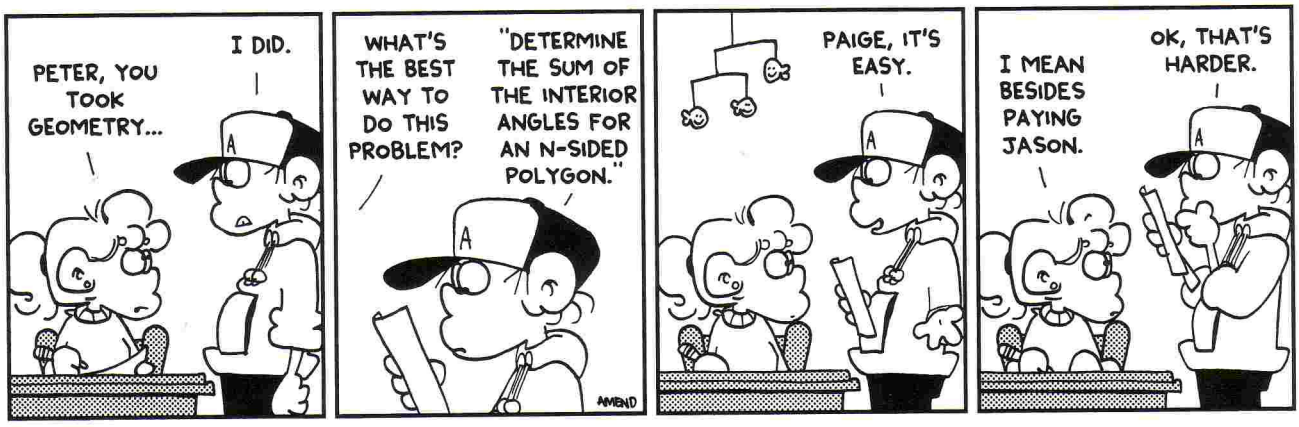
$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \varepsilon_{a,b}$$

où $\varepsilon_{a,b}$ est une fonction simple de a et b.

3) Résoudre $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

4) Prouver que $\arctan \dfrac{5}{12} = 2\arctan \dfrac{1}{5}$, puis que $4\arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.

Cette dernière formule découverte par John Machin lui permit de calculer 100 décimales de π en 1706.

Exercice 10

Prouver que $\forall\, x \neq 0$, $\arccos \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x} = \mathrm{sgn}(x)\arctan(\mathrm{sh}\, x)$.