Quelques éléments de logique

Les mathématiques sont basées sur une série de *définitions* (le vocabulaire de base, comme dans tout langage) et d'*axiomes* qui sont des propositions admises (par exemple, la géométrie euclidienne est basée sur 5 axiomes).

A partir de là, on multiplie les *propriétés* et *théorèmes* qui découlent des axiomes. Ces propriétés et théorèmes doivent être prouvées (ou démontrées) à l'aide de *règles de la logique* (celles-ci elles-mêmes basées sur des axiomes).

Un *proposition* A est une assertion qui peut être vraie ou fausse.

Si A est une proposition, « non A » est la *proposition contraire* (la négation de A, souvent notée $\overline{A}$).

Remarquons que :

- « non (non A) » est la même proposition que A (la fameuse double négation !)
- Si A est vraie, « non A » est fausse (une chose et son contraire ne peuvent pas être vraies en même temps !)

Une preuve est une suite d'implications (voire d'équivalences, qui sont en fait deux implications) du type $A \Rightarrow B$, ce qui se traduit par : « si A est vraie, alors B est vraie ».

Quelques règles :

- Si $A \Rightarrow B$, alors $\text{non } B \Rightarrow \text{non } A$ et réciproquement. Ce qui se traduit par :

$$(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A).$$

- Il découle de ce qui précède que :

$$(A \Leftrightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non } B \Leftrightarrow \text{non } A).$$

- Les relations $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont transitives : si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ alors $A \Rightarrow C$ (de même pour $\Leftrightarrow$).
- A partir de deux propositions A et B, on peut définir d'autres propositions :
  - C = « A et B », notée $A \wedge B$: C est vraie si A et B sont vraies toutes les deux.
  - D = « A ou B », notée $A \vee B$: D est vraie si A ou B est vraie.

    Attention, il s'agit du « ou » *inclusif*, c'est-à-dire : A est vraie ou B est vraie ou les deux sont vraies.
- La négation de « et » est « ou » et la négation de « ou » est « et », c'est-à-dire :

« non (A et B) » = « non A » ou « non B » et « non (A ou B) » = « non A » et « non B ».

Quantificateurs :

- $\forall$: « Quelque soit », « Pour tout ».
- $\exists$: « Il existe ».
- $\exists!$: « Il existe un unique ».
- \ : « Tel que ».

Et on a les *règles* :

- La négation de $\forall$ est $\exists$.
- La négation de $\exists$ est $\forall$.

Enfin, **ATTENTION : Dans une phrase mathématique, l'ordre des quantificateurs est très important !**