Méthodes de démonstration

- **Preuve directe**

  Pour prouver la conclusion C sous l'hypothèse H, on raisonne par implications :

  « si H, alors …, alors …, donc C ».

- **Preuve par l'absurde**

  On suppose le contraire de ce que l'on veut prouver et on montre que l'on aboutit à une absurdité.

- **Preuve par récurrence**

  Pour prouver que $\forall\, n \geq n_o$, la propriété P_n est vraie, on montre que :

  Récurrence simple :

  - P_{n_o} est vraie (initialisation) ;
  - pour $n \geq n_o$, si P_n est vraie, alors P_{n+1} aussi (hérédité).

  Récurrence double :

  - P_{n_o} et P_{n_o+1} sont vraies (initialisation) ;
  - pour $n \geq n_o$, si P_n et P_{n+1} sont vraies, alors P_{n+2} aussi (hérédité).

  Récurrence triple, quadruple, …

  Récurrence généralisée :

  - P_{n_o} est vraie (initialisation) ;
  - pour $n \geq n_o$, si P_{n_o}, P_{n_o+1}, …, P_k, …, P_n sont vraies, alors P_{n+1} aussi (hérédité).

- **Prouver une équivalence**

  Pour prouver une équivalence « $A \Leftrightarrow B$ », on peut soit :

  - procéder par équivalences : $A \Leftrightarrow A' \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow B$.
  - Prouver les deux implications : $A \Rightarrow B$ (sens direct) et $B \Rightarrow A$ (sens réciproque)

  Remarque :

  Si $A \Rightarrow B$, on dit que A est une *condition suffisante* pour avoir B.

  Si $A \Leftarrow B$, on dit que A est une *condition nécessaire* pour avoir B.

  Si $A \Leftrightarrow B$, on dit que A est une *condition nécessaire et suffisante* pour avoir B.

- **Prouver l'égalité de deux ensembles**

  Si E et F sont deux ensembles, prouver $E = F$ équivaut à prouver la double inclusion : $E \subset F$ et $F \subset E$.

- **Preuve par analyse-synthèse**

  Pour prouver un résultat, on suppose qu'il est vrai et on voit ce qu'il implique (*analyse*).

  Il faut alors faire une réciproque pour prouver que le résultat est effectivement vrai (*synthèse*).

  Cette technique est souvent utilisée pour prouver l'existence (et éventuellement l'unicité) d'un objet :

  Montrer qu'il existe (un unique) A tel que B :

  Analyse : On suppose que A existe et on montre qu'alors il est égal à « ceci »
  (ce qui en général donne l'unicité).
  Synthèse : On prouve que « ceci » vérifie bien ce que l'on veut (B).