Chapitre 2 : Rappels sur les fonctions

Savoir-faire

Généralités

1) Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?
2) Comment étudier la parité/imparité/périodicité d'une fonction ?
3) Comment interpréter graphiquement la parité/imparité/périodicité d'une fonction ?
4) Comment étudier le signe d'une fonction, comparer deux fonctions ?
5) Comment savoir si l'on doit re-dériver la dérivée ?
6) Comment et quand utiliser une fonction auxiliaire ?
7) Comment choisir une « bonne » fonction auxiliaire ?
8) Comment prouver qu'une fonction est minorée/majorée/bornée ?
9) Comment prouver qu'une fonction admet un extremum ?
10) Comment faire la différence entre extremum local et global ?
11) Comment prouver qu'une droite est asymptote verticale/horizontale/oblique à la courbe représentative d'un fonction ?
12) Comment déterminer la position relative de deux courbes ? d'une courbe et de son asymptote ? d'une courbe et d'une de ses tangentes ?
13) Comment prouver que la courbe représentative d'un fonction admet un centre/axe de symétrie ?
14) Comment trouver les racines d'une fonction polynôme ? En étudier le signe ?

Limites

1) Comment identifier les bornes d'un ensemble de définition ?
2) Comment déterminer la limite d'une fonction en un réel ? en $+\infty$ ou $-\infty$?
3) Comment reconnaitre l'opération principale dans une formule ?
4) Comment reconnaitre une forme indéterminée et lever une indétermination ?

Continuité

1) Comment étudier la continuité d'une fonction en un point ? sur un ensemble ?
2) Comment reconnaitre l'opération principale dans une formule ?
3) Comment déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = a$ ou $f(x) = g(x)$?
4) Comment trouver et justifier une valeur à 10 approchée à 10^{-n} près ou un encadrement d'amplitude 10^{-n} d'une solution de $f(x) = a$?

Dérivation

1) Comment étudier la dérivabilité d'une fonction en un point ? sur un ensemble ?
2) Comment déterminer l'ensemble de dérivabilité d'une fonction ?
3) Comment reconnaitre l'opération principale dans une formule ?
4) Comment reconnaitre un taux de variation ?
5) Comment utiliser la dérivabilité d'une fonction pour trouver la limite d'une autre ?
6) Comment interpréter graphiquement la limite d'un taux de variation en un point ?
7) Comment prouver l'existence d'une tangente en un point ? de deux demi-tangentes ?

Quelques questions diverses

1) Quand faut-il parler de f, f(x) ou C_f ?
2) Quelle est la différence entre taux de variation et nombre dérivé ?
3) Quelle est la différence entre tangente et asymptote ?
4) Comment trouver le sommet d'une parabole ?
5) Comment, quand et pourquoi utiliser l'expression conjuguée ?
6) Quelle est la différence entre étudier les variations d'une fonction et dresser son tableau de variations ?

Fonction exponentielle

Théorème et définitions :

- Il existe une unique fonction f, appelée la <u>fonction exponentielle</u>, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0)=1 \text{ et } f'=f.$$

  On note $f(x)=\exp(x)=e^x$.

- Le <u>nombre e</u> est défini par $e=\exp(1)=e^1$.

Propriétés :

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- $\forall a\in\mathbb{R}$ et $\forall b\in\mathbb{R}$: $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$ et $e^a\le e^b \Leftrightarrow a\le b$.
- Si f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=1$ et $f'=kf$ avec $k\in\mathbb{R}$, alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\exp(kx)=e^{kx}.$$

- Si f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\left(\exists k\in\mathbb{R} \text{ tel que } f(x)=\exp(kx)\right) \Leftrightarrow \left(\forall x\in\mathbb{R} \text{ et } \forall y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)f(y)\right).$$

  Remarque : $k=f'(0)$.

Règles de calcul : $\forall a\in\mathbb{R}$ et $\forall b\in\mathbb{R}$,

- $e^0=1$
- $e^{a+b}=e^ae^b$
- $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$.
- Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n nombres réels, $e^{a_1+a_2+\dots+a_n}=e^{a_1}e^{a_2}\dots e^{a_n}$.
- $\forall n\in\mathbb{Z}$, $(e^a)^n=e^{na}$.

Etude de la fonction exponentielle :

Si $f(x)=e^x$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x$ et on a le tableau :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$

Limites :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Formules de dérivée et primitives :

- $x\mapsto e^x$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto e^x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.
- Si u est une fonction dérivable sur D, alors e^u est dérivable sur D de dérivée $u'e^u$.
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $u'e^u$ admet des primitives sur I de la forme e^u+K avec K constante réelle.

Fonction logarithme

Théorème et définitions :

Il existe une unique fonction f, appelée la <u>fonction logarithme népérien (ou naturel)</u>, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, notée $f(x) = \ln x$, telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln x} = x \ \text{ et } \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x\,.$$

Propriétés :

- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, b \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$.
- Si f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors :

$$\left(\exists\, k \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = k \ln x\right) \Leftrightarrow \left(\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall\, y \in \mathbb{R}_+^*,\ f(xy) = f(x) + f(y)\right).$$

Remarque : $k = f(e)$.

Règles de calcul : $\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall\, b \in \mathbb{R}_+^*$,

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n nombres réels strictement positifs, $\ln(a_1 a_2 \ldots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n$.
- $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n \ln a$.

Etude de la fonction logarithme :

Si $f(x) = \ln x$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et on a le tableau :

x	0	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

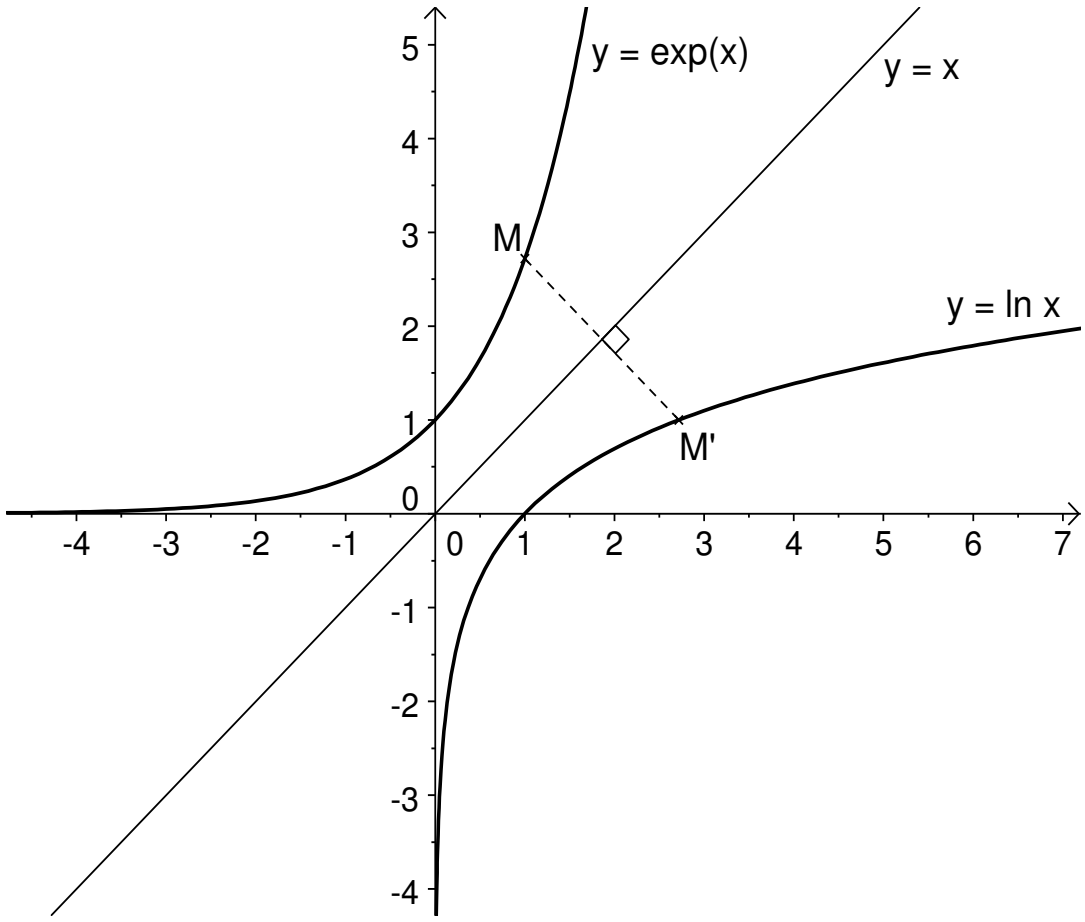
Limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Formules de dérivée et primitives :

- Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur D, alors $\ln u$ est dérivable sur D de dérivée $\dfrac{u'}{u}$.
- Si u est une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I, alors $\dfrac{u'}{u}$ admet des primitives sur I de la forme $\ln|u| + K$ avec K constante réelle.

Courbes des fonctions exponentielle et logarithme



Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation y = x.

Fonctions exponentielles de base a

Définition :

La <u>fonction exponentielle de base a</u> est la fonction : $x \mapsto a^x = e^{(\ln a)x}$. On note aussi $a^x = \exp_a(x)$.

Remarques :

- ***ATTENTION*** : Il faut $a > 0$.
- ***CONSEIL*** : *Revenir le plus souvent possible à l'exponentielle classique.*
- $\forall\, a > 0$ et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a^x > 0$.
- Si a = 10, $x \mapsto 10^x$ est la réciproque de log (logarithme décimal) et si a = 1, $x \mapsto 1^x = 1$ est constante.

☞ ***Les règles de calcul sont les mêmes que celles de la fonction exponentielle (et des puissances).***

Etude de $f : x \mapsto a^x$:

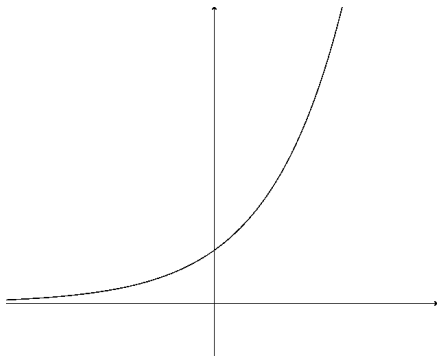
- f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$;
- $f'(x) = (\ln a)\, a^x$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln a$.

Pour a > 1

- $f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty}$.
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$

- Courbe :

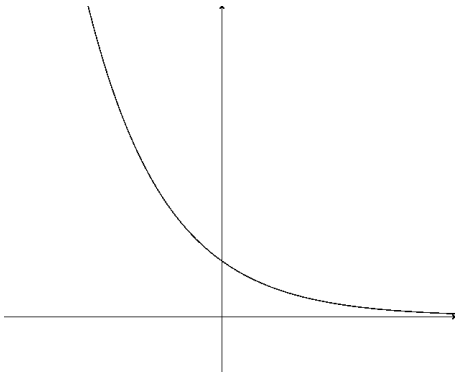


Pour a < 1

- $f'(x) < 0$ donc f strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0}$.
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	0

- Courbe :



Fonctions logarithmes de base a

Définition :

Soit $a > 0$. Il existe une unique fonction f, appelée la <u>fonction logarithme de base a</u>, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, notée $f(x) = \log_a x$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ a^{\log_a x} = x \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x .$$

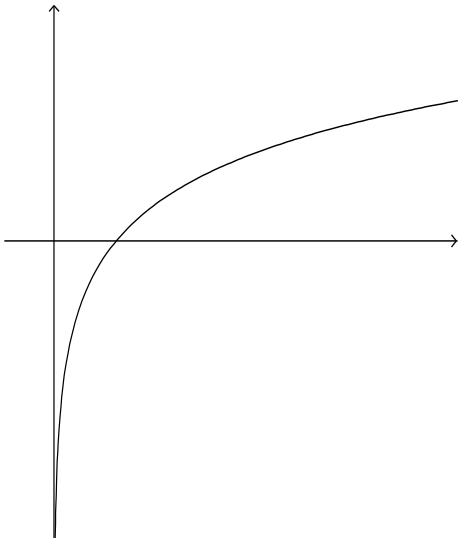
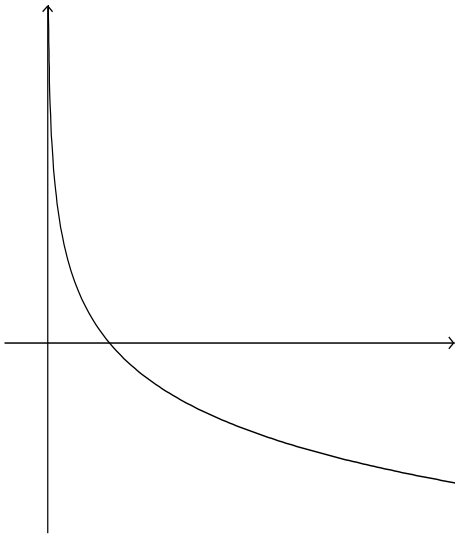
En particulier , pour a = 10, la fonction est appelée <u>logarithme décimal</u> et on note juste $f(x) = \log x$.

Propriétés :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
- Les règles de calcul sont les mêmes que celles de la fonction logarithme.

Etude de $f : x \mapsto \log_a x$:

- f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln a$.

Pour a > 1	**Pour a < 1**
• $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.	• $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
• $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty}$.	• $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty}$.
• Courbe : 	• Courbe : 

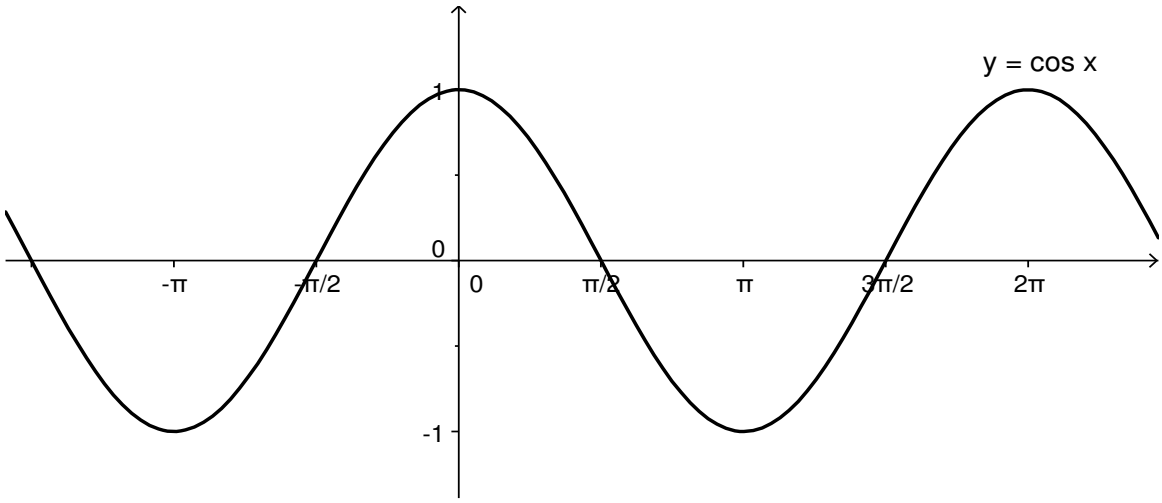
Fonctions circulaires

Fonction cosinus

La fonction cosinus, $x \mapsto \cos x$, est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire.

Sa dérivée est $x \mapsto -\sin x$.

Ses primitives sont $x \mapsto \sin x + \text{cste}$.

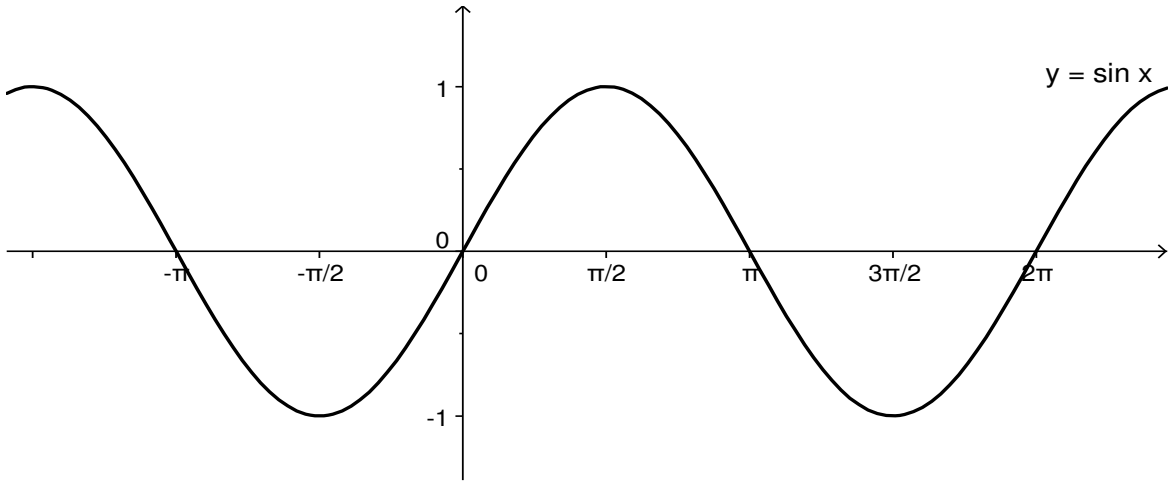


Fonction sinus

La fonction cosinus, $x \mapsto \sin x$, est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire.

Sa dérivée est $x \mapsto \cos x$.

Ses primitives sont $x \mapsto -\cos x + \text{cste}$.

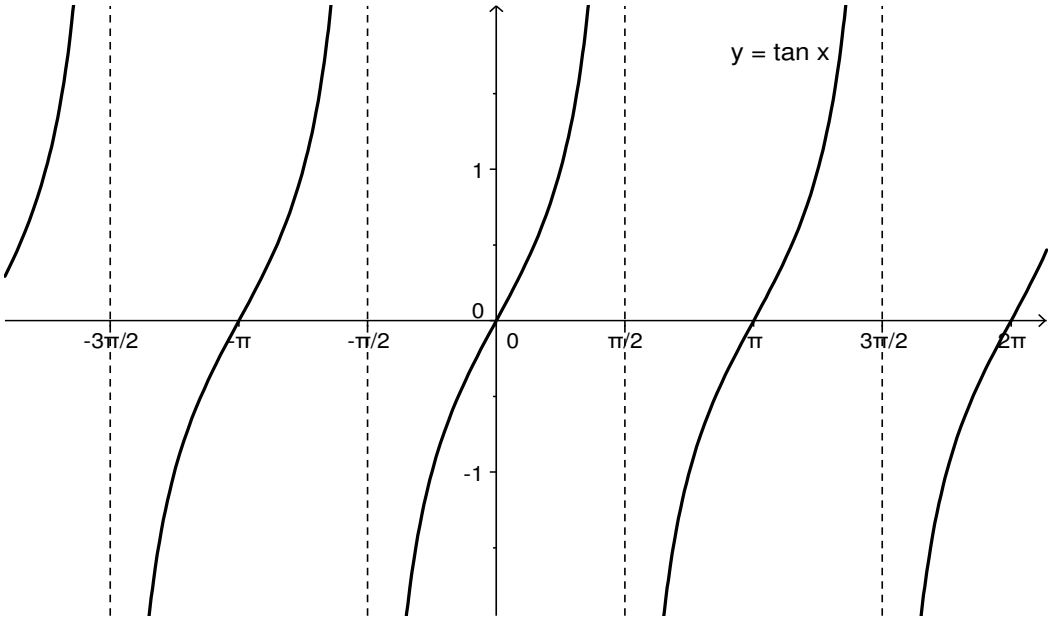


Fonction tangente

La fonction tangente, $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, est définie, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, π-périodique, impaire.

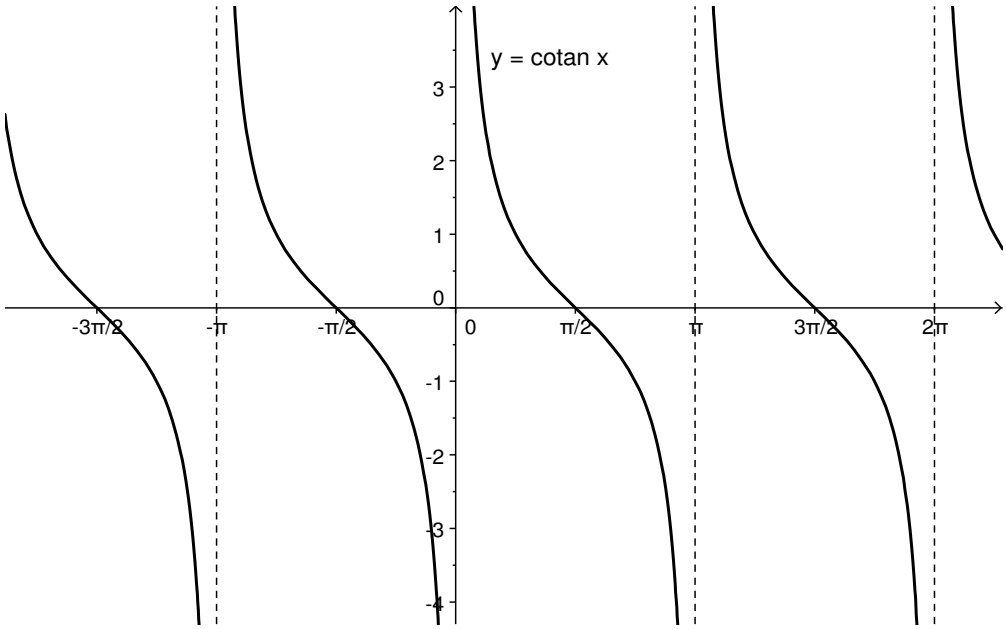
Sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Ses primitives sont $x \mapsto -\ln|\cos x| + \text{cste}$.



Fonction cotangente

La fonction tangente, $x \mapsto \text{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, est définie, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{(k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, π-périodique, impaire.

Sa dérivée est $x \mapsto -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotan}^2 x)$.

Ses primitives sont $x \mapsto \ln|\sin x| + \text{cste}$.