Résumé sur les complexes (notions de Terminale)

L'ensemble $\mathbb{C}$ des **nombres complexes** est l'ensemble des nombres z de la forme x + iy avec $i^2 = -1$.

Forme algébrique : $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Partie réelle : $\mathrm{Re}(z) = x$.

Partie imaginaire : $\mathrm{Im}(z) = y$.

Imaginaire pur : Nombre complexe de la forme $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$.

Les opérations de base (+, –, x et ÷) ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$, en particulier les règles de puissances et les identités remarquables fonctionnent dans $\mathbb{C}$. La propriété « *un produit de facteur est nul si et seulement un facteur est nul* » est valable dans $\mathbb{C}$.

Conjugaison

(Complexe) conjugué : $\overline{z} = x - iy$.

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R}$ (z est réel) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(z) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = z$;
- $z \in i\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(z) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = -z$;
- $z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = 0$ (et donc $z \neq 0 \Leftrightarrow \overline{z} \neq 0$).

Règles de calcul avec les conjugués

$\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$:

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ (avec $z \neq 0$)
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$ avec $z \neq 0$ si nécessaire)

Module et argument

Forme trigonométrique : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ (pour $z \neq 0$).

- $|z|$ est le **module** de z ;
- $\theta = \arg(z)$ est un **argument** de z.

Si $z = x + iy$, on a :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$:

$$z = z' \iff |z| = |z'| \text{ et } \arg(z) = \arg(z')\,[2\pi].$$

En particulier :

- $|0| = 0$ et 0 n'a pas d'argument ;
- si z est réel, module et valeur absolue sont identiques et $\arg(z) = \begin{cases} 0\,[2\pi] & \text{si } z > 0 \\ \pi\,[2\pi] & \text{si } z < 0 \end{cases}$;
- si z est imaginaire pur avec $z = iy$, $|z| = |y|$ et $\arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\,[2\pi] & \text{si } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}\,[2\pi] & \text{si } y < 0 \end{cases}$.

Règles de calcul avec les modules et les arguments

$\forall z \in \mathbb{C}^*$ et $\forall z' \in \mathbb{C}^*$:

- $\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).
- $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$
- $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\,[2\pi]$
- $|z^n| = |z|^n$ et $\arg\left(z^n\right) = n\arg(z)\,[2\pi]$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$
- $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,[2\pi]$
- $z\overline{z} = |z|^2$ *donc* $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Exponentielles complexes

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Forme exponentielle : $z = |z|e^{i\theta}$ (pour $z \neq 0$).

En particulier :

$$|z| = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}.$$

Exponentielle d'un nombre complexe : $e^z = e^x e^{iy}$ avec $z = x + iy$.

Règles de calcul avec les exponentielles complexes

$\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$:

- $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
- $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
- $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$
- $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Formule de Moivre : $\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.	*Formules d'Euler* : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

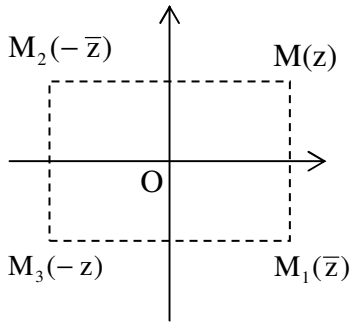
Interprétation géométrique

Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Affixe : Si M est un point (*resp.* : $\vec{U}$ est un vecteur) de coordonnées (x, y), alors $z = x + iy$ est l'affixe du point M (*resp.* : du vecteur $\vec{U}$). Le plan est ainsi mis en bijection avec $\mathbb{C}$.

Si M est un point d'affixe z :

$$|z| = OM \quad \text{et} \quad \arg(z) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right).$$



- $M \in (Ox) \Leftrightarrow$ z est réel ;
- $M \in (Oy) \Leftrightarrow$ z est imaginaire pur.

Pour tous vecteurs $\vec{U}$ (z) et $\vec{V}$ (z') :

- l'affixe de $\vec{U} + \vec{V}$ est z + z' et l'affixe de $k\vec{U}$ avec k *réel* est kz.
- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ (non nuls) sont colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que z' = kz.
- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow z\overline{z'} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z}z' \in \mathbb{R}$.
- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow z\overline{z'} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z}z' \in i\mathbb{R}$.

Pour tous points A(z_A) et B(z_B), l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et :

$$\boxed{AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right) \ [2\pi]} \quad \text{(avec } A \neq B\text{)}.$$

Pour tous points A, B, C et D, tels que avec A ≠ B *et* C ≠ D) :

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \ [2\pi]}$$

Barycentres

Si $G = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{array}\right)$ (avec les α_i réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$) alors :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \ldots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}.$$

En particulier :

- l'affixe du milieu d'un segment [AB] est $\dfrac{z_A + z_B}{2}$;
- l'affixe du centre de gravité d'un triangle ABC est $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Equations paramétriques complexes

<u>Droite</u> :

$$\boxed{z = z_1 + tz_2}$$

où $t \in \mathbb{R}$, $z_1 \in \mathbb{C}$ est l'affixe d'un point de la droite et $z_2 \in \mathbb{C}$ est l'affixe d'un vecteur directeur de la droite.

<u>Cercle</u> :

$$\boxed{z = z_0 + Re^{i\theta}}$$

où R > 0 est le rayon du cercle et $z_0 \in \mathbb{C}$ est l'affixe de son centre.

Transformations

Si F est une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' = F(M) d'affixe z', on appelle écriture complexe de F la relation z' = f(z) donnant z' en fonction de z.

***Attention** : ne pas confondre* F *et* f …

- F est une **translation** $\Leftrightarrow$ l'écriture complexe de F est z' = z + b.

  ☞ L'affixe du vecteur $\vec{U}$ de la translation est b et l'écriture complexe de F est alors $\boxed{z' = z + z_{\vec{U}}}$.

- F est une **homothétie** $\Leftrightarrow$ l'écriture complexe de F est z = kz + b avec $k \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$.

  ☞ Le rapport de F est k, son centre Ω est l'unique point invariant de F (tel que $z_\Omega = kz_\Omega + b$) et l'écriture complexe de F est alors $\boxed{z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega}$.

- F est une **rotation** $\Leftrightarrow$ l'écriture complexe de F est $z = e^{i\theta} z + b$ avec θ réel, $\theta \neq 0\ [2\pi]$.

  ☞ L'angle de F est $e^{i\theta}$, son centre Ω est l'unique point invariant de F (tel que $z_\Omega = e^{i\theta} z_\Omega + b$) et l'écriture complexe de F est alors $\boxed{z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega}$.

- F est la **symétrie d'axe (Ox)** $\Leftrightarrow$ l'écriture complexe de F est $z' = \overline{z}$.
- F est la **symétrie d'axe (Oy)** $\Leftrightarrow$ l'écriture complexe de F est $z' = -\overline{z}$.

  ☞ Plus généralement, l'écriture complexe d'une réflexion (symétrie axiale) est de la forme :

  $$z' = a\overline{z} + b \quad \text{avec } |a| = 1.$$