TD du Chapitre 1 : Nombres complexes

Exercice 1

Déterminer le module et un argument de :

a. $\dfrac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$.

b. $\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$.

Dans les exercices 2 à 7, on se place dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 2

Déterminer le lieu des points M du plan complexe, d'affixe z, tels que :

a. $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right|=1$.

b. $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

c. $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right|=2$.

d. $\begin{cases}|1-z|\leq 1\\ |1+z|<1\end{cases}$.

e. $|z^2|=|1-z|=|\overline{z}|$.

f. $z+ab\overline{z}=a+b$ où a et b sont deux nombres complexes de module 1, tels que $(ab)^2\neq 1$.

Exercice 3

Soient A et B les points d'affixes respectives i et 1. On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, r' le quart de tour indirect de centre B et s la réflexion d'axe (Ox).

a. Caractériser $r\circ r'$.

b. Démontrer qu'il existe une unique réflexion σ telle que $r'=s\circ\sigma$. Donner son axe.

Exercice 4

Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c.

Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a+bj+cj^2=0$ où $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 5

Soit *C* un cercle de centre Ω et A, B, C et D trois points de *C*. Montrer que :

a. $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$ (théorème de l'angle au centre).

b. $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [\pi]$ (théorème de l'angle inscrit).

☺ *On pourra se ramener à* $\Omega = O$ *, l'origine du repère.*

Exercice 6

Soit ABCD un carré. Montrer que si C et D sont à coordonnées entières alors A et B aussi.

Exercice 7

Soit ABCDEFG un heptagone régulier convexe. Montrer que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Exercice 8

On considère quatre nombres complexes de module 1 dont la somme vaut 0. Montrer que ces nombres sont opposés deux à deux.

Exercice 9

On pose $f(z) = z^5 - 1$.

1) Développer $\left(z^2 + \frac{1}{2}z + 1\right)^2 - \frac{5}{4}z^2$. En déduire la factorisation maximale de f(z) dans $\mathbb{R}$.

2) Factoriser f(z) au maximum dans $\mathbb{C}$.

3) En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{2\pi}{5}$, puis de $\frac{\pi}{5}$ en valeurs exactes.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a. $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.

b. $z^3 - i = 6(z+i)$.

c. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

d. $z^4 = z + \overline{z}$.

e. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x = 0$.

b. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$.

Exercice 12

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_{pn}$ et que l'on a l'égalité ssi p = 1.

2) Soient n et m deux entiers strictement positifs. Montrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \{1\}$ ssi $\text{PGCD}(n,m) = 1$.

3) Montrer que si $\text{PGCD}(n,m) = d > 1$, alors $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_d$.

Exercice 13

Soient a, b et c trois réels tels que $\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0$.

Calculer $\cos na + \cos nb + \cos nc$ et $\sin na + \sin nb + \sin nc$ pour tout entier naturel n.

☺ *Un petit passage dans le plan complexe aide beaucoup…*

Exercice 14

Montrer que l'équation $e^z = z$ n'a pas de solution réelle. A-t-elle des solutions complexes ?

☺ *Ne pas hésiter à utiliser des fonctions…*

Exercice 15

Résoudre $e^z = \sqrt{3} + 3i$.

Exercice 16

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^3 - 3x - 1 = 0$.

1) Montrer que (E) admet trois solutions réelles.

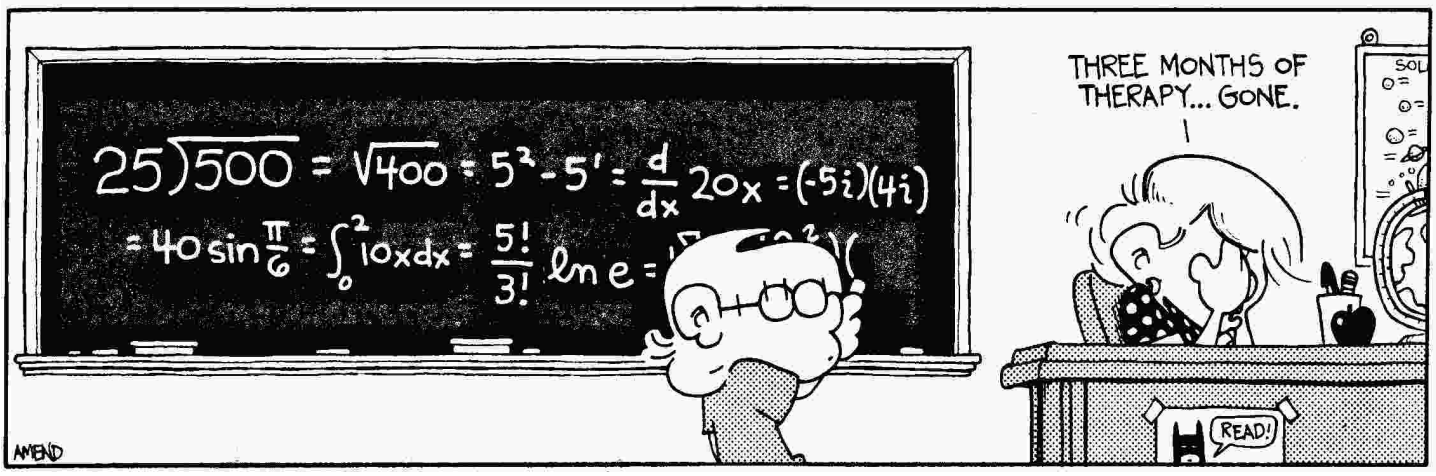
On pose $x = u + v$ avec u et v complexes de façon à avoir deux inconnues (u et v) au lieu d'une (x) et à se donner la possibilité de poser une condition sur u et v afin de simplifier le problème.

2) Montrer que l'on a : $u^3 + v^3 + 3(uv - 1)(u + v) - 1 = 0$.

La condition annoncée plus haut est $uv = 1$.

3) Justifier qu'alors u^3 et v^3 sont solutions de $X^2 - X + 1 = 0$. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

4) On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Déterminer les couples (u, v) possibles et en déduire les valeurs exactes des solutions de (E).


THREE MONTHS OF THERAPY... GONE.
READ!
AMEND