Corrigés des TD du Chapitre 1

Exercice 1

a. Il faut déjà que θ ne soit pas un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ pour que sa tangente soit définie. Alors :

$$Z = \frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta\left(1+i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^2 = (e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}.$$

Donc :

$$\boxed{|Z| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(Z) = 2\theta}$$

b. On a déjà $1+\cos\theta - i\sin\theta = 0 \iff \begin{cases}\cos\theta = -1\\ \sin\theta = 0\end{cases} \iff \theta = \pi\ [2\pi]$. Donc, il faut que $\theta \neq \pi\ [2\pi]$. Alors :

$$Z' = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{-i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = e^{i\theta}.$$

Donc :

$$\boxed{|Z'| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(Z') = \theta}$$

Exercice 2

a. Il faut que $z \neq -i$.

Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et – i. On a alors :

$$\left|\frac{z-1}{z+i}\right| = 1 \iff \frac{|z-1|}{|z+i|} = 1 \iff \frac{AM}{BM} = 1 \iff AM = BM.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est la médiatrice de [AB].}}$$

b. Il faut que $z \neq -i$ et $z \neq 1$. Avec encore A et B tels que plus haut :

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \text{BAM est rectangle en M et direct}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le lieu recherché est le demi-cercle de diamètre [AB], d'extrémités}\\ \text{A et B exclue et tel que si C est sur ce demi-cercle, BAC est direct.}\end{array}}$$

c. Il faut encore que $z \neq -i$, et avec les mêmes notations, $M \neq B$ et :

$$\left|\frac{z-1}{z+i}\right| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad AM = 2BM \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}^2 - 2\overrightarrow{BM}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM}).(\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM}) = 0.$$

Soient $I = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -2 \end{array}\right)$ et $J = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & 2 \end{array}\right)$.

Pour tout M du plan, on a $\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{JM}$, donc :

$$\left|\frac{z-1}{z+i}\right| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JM} = 0.$$

Donc, M est sur le cercle de diamètre [IJ].

De plus, comme I et J sont sur (AB) et non confondus avec B, B n'est pas sur le cercle.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est le cercle de diamètre [IJ].}}$$

d. L'ensemble des points tels que $|1-z| \leq 1$ est le disque fermé de centre A(1) et de rayon 1 et l'ensemble des points tels que $|1+z| < 1$ est le disque ouvert de centre B(– 1), donc le lieu recherché est l'intersection de ces deux disques, qui est vide.

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est l'ensemble vide.}}$$

e. Pour tout complexe z, $|z^2| = |z|^2$ et $|\overline{z}| = |z|$ donc :

$$|z^2| = |1-z| = |\overline{z}| \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 = |1-z| = |z|.$$

Et :

$$|z|^2 = |z| \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 0 \text{ ou } 1.$$

Mais, si $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$ et si z = 0, $|1-z| \neq |z|$ donc :

$$|z^2| = |1-z| = |\overline{z}| \quad \Leftrightarrow \quad |1-z| = |z| = 1.$$

Si maintenant, A est le point d'affixe 1, on a :

$$|z^2| = |1-z| = |\overline{z}| \quad \Leftrightarrow \quad AM = OM = 1.$$

Donc, M est sur l'intersection du cercle trigonométrique et du cercle de centre A et de rayon 1. Remarquons que M est aussi sur la médiatrice de [OA], d'équation $x = \frac{1}{2}$. Alors :

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est l'ensemble } \{B, C\} \text{ avec } z_B = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_C = \overline{z}_B.}$$

f. Appelons s, la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z, associe M', d'affixe $z' = -ab\overline{z} + a + b$.

On cherche l'ensemble des points invariants par s.

L'écriture complexe de cette transformation est de la forme $z' = A\overline{z} + B$ avec $|A| = 1$ donc s est une isométrie.

Comme $(ab)^2 \neq 1$, on a $ab \neq -1$ et s n'est pas l'identité.

De plus, pour tout point M, si $s\circ s(M)$ a pour affixe z'', on a :

$$z'' = -ab\overline{z'} + a + b = -ab\left(\overline{-ab\overline{z} + a + b}\right) + a + b = |ab|^2 z - ab(\overline{a+b}) + a + b = z - ab(\overline{a+b}) + a + b.$$

Or, si $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$, on a $-ab(\overline{a+b}) + a + b = -e^{i\alpha}e^{i\beta}(e^{-i\alpha} + e^{-i\beta}) + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = -e^{i\beta} - e^{i\alpha} + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$.

Donc, $z'' = z$ et ainsi, $s\circ s$ est l'identité donc s est une réflexion et l'ensemble recherché est l'axe de cette réflexion. Pour déterminer cet axe, il suffit d'en trouver deux points.

Cherchons un éventuel point invariant sur (Ox), d'affixe $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$iy = aby + a + b \Leftrightarrow (1+ab)x = a + b.$$

Comme $ab \neq -1$, on a :

$$x = \frac{a+b}{1+ab} = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}} = \frac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

qui est bien réel.

Cherchons un éventuel point invariant sur (Oy), d'affixe iy avec $y \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$iy = abiy + a + b \Leftrightarrow (1-ab)iy = a + b.$$

Comme $(ab)^2 \neq 1$, on a $ab \neq 1$ et :

$$y = \frac{a+b}{i(1-ab)} = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{i(1-e^{i(\alpha+\beta)})} = \frac{e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}{ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}}\frac{e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}}{e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} - e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

qui est bien réel.

Remarquons enfin que les deux point trouvés sont confondus si et seulement si ils se confondent avec O, donc si et seulement si $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha + \pi\ [2\pi]$, soit $b = -a$. Dans ce cas :

$$z + ab\overline{z} = a + b \quad\Leftrightarrow\quad z = a^2\overline{z} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{a}z = a\overline{z} = \overline{\overline{a}z} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{a}z \in \mathbb{R}.$$

Donc, $z = \frac{\lambda}{\overline{a}} = \lambda a$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, M est sur la droite (OC) où $z_C = a$.

Si $b \neq -a$, alors l'axe de s est la droite (AB) avec $z_A = \frac{a+b}{1+ab}$ et $z_B = \frac{a+b}{1-ab}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est la droite (AB) si } b \neq -a \text{ ou la droite (OC) si } b = -a.}$$

Exercice 3

a. L'écriture complexe de r est $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-i) + i$ et celle de r' est $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-1) + 1 = -iz + i + 1$.

Alors, l'écriture complexe de $r\circ r'$ est :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{6}}\left[(-iz + i + 1) - i\right] + i = e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)}z + e^{i\frac{\pi}{6}} + i = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{6}} + i.$$

Cette écriture est de la forme $z'=e^{i\alpha}z+b$ avec $\alpha=-\frac{\pi}{3}$ donc $r\circ r'$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Son centre Ω, d'affixe ω, est invariant donc $\omega=e^{-i\frac{\pi}{3}}\omega+e^{i\frac{\pi}{6}}+i$, et :

$$\omega=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+i}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{2}}}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+1}{e^{i\frac{\pi}{3}}-1}=i\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}.$$

Ainsi :

$$\boxed{r\circ r' \text{ est la rotation d'angle } -\frac{\pi}{3} \text{ et de centre } \Omega(\sqrt{3}).}$$

b. Supposons que σ existe. On a alors $r'=s\circ\sigma$ et en composant par s à gauche, avec $s\circ s=id$, on a :

$$s\circ r'=s\circ s\circ\sigma=\sigma.$$

Donc, si σ existe, $\sigma=s\circ r'$ et elle est unique.

Réciproquement, il suffit de prouver que $s\circ r'$ est bien une réflexion.

L'écriture complexe de $s\circ r'$ est :

$$z'=\overline{-iz+i+1}=i\overline{z}-i+1.$$

Cette écriture montre clairement que $s\circ r'\neq id$ et l'écriture complexe de $(s\circ r')\circ(s\circ r')$ est :

$$z'=i(\overline{i\overline{z}-i+1})-i+1=i(-iz+i+1)-i+1=z-1+i-i+1=z.$$

Ainsi, $(s\circ r')\circ(s\circ r')=id$ et ainsi, $s\circ r'$ est une réflexion.

Finalement :

$$\boxed{\sigma=s\circ r' \text{ est l'unique réflexion telle que } r'=s\circ\sigma.}$$

Exercice 4

ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

L'écriture complexe de cette rotation est $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-a)+a$, donc :

$$\text{ABC est équilatéral direct} \iff c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)+a.$$

Et :

$$c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)+a \iff a=\frac{c-e^{i\frac{\pi}{3}}b}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}} \iff a-\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}-1}b+\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}-1}c=0.$$

Or, $1-e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}=1-e^{i\frac{\pi}{3}}+(-e^{i\frac{\pi}{3}})^2=\frac{1-(-e^{i\frac{\pi}{3}})^3}{1-(-e^{i\frac{\pi}{3}})}=\frac{1+e^{i\pi}}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}=0$, donc :

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=j+1.$$

De plus, comme $j^3 = 1$, on a :

$$\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1} = \frac{1}{j} = j^2 .$$

Et $j^3 - 1 = (j-1)(1+j+j^2) = 0$. Or, $j \neq 1$, donc, $1+j+j^2 = 0$ et :

$$-\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1} = -(j+1)j^2 = -(1+j^2) = j .$$

Finalement, on a bien :

$$\text{ABC est équilatéral direct} \iff a + bj + cj^2 = 0 .$$

Exercice 5

Quitte à effectuer la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$ (qui conserve les angles orientés), on peut supposer que $\Omega = O$.

Appelons alors R le rayon de *C* de centre O et a, b, c et d les affixes respectives de A, B, C et D.

Comme les quatre points sont sur le cercles, on peut écrire $a = Re^{i\alpha}$, $b = Re^{i\beta}$, $c = Re^{i\gamma}$ et $d = Re^{i\delta}$.

a. On a :

- $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg\left(\frac{Re^{i\beta}}{Re^{i\alpha}}\right) = \arg\left(e^{i(\beta-\alpha)}\right)$, soit :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \beta - \alpha \ [2\pi] .$$

- $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{Re^{i\beta} - Re^{i\gamma}}{Re^{i\alpha} - Re^{i\gamma}}\right) = \arg\left(\frac{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}}\right)$.

  Et en écrivant $\beta = \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}$, $\alpha = \frac{\alpha+\gamma}{2} + \frac{\alpha-\gamma}{2}$ et $\gamma = \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\alpha-\gamma}{2}$, on a :

$$\frac{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}} = \frac{e^{i\frac{\beta+\gamma}{2}}(e^{i\frac{\beta-\gamma}{2}} - e^{-i\frac{\beta-\gamma}{2}})}{e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}})} = e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} .$$

  Ainsi, $\arg\left(\frac{e^{i\beta} - e^{i\gamma}}{e^{i\alpha} - e^{i\gamma}}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}$ ou $\frac{\beta-\alpha}{2} + \pi \ [2\pi]$ suivant le signe de $\frac{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}$, ce qui se résume en :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\beta-\alpha}{2} \ [\pi] .$$

Finalement, on a $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \beta - \alpha \ [2\pi]$, soit :

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \ [2\pi] .$$

On vient donc de prouver le théorème de l'angle au centre avec les complexes.

b. Comme plus haut, on a $2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\ [2\pi]$ (en remplaçant C par D, qui joue le même rôle), donc :

$$2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) = 2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\ [2\pi].$$

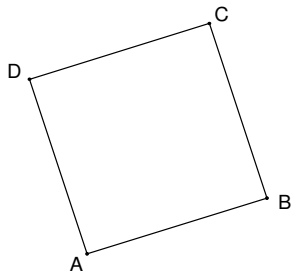
Soit :

$$(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\ [\pi].$$

Ceci prouve le théorème de l'angle inscrit.

Exercice 6

Quitte à échanger A et B, et C et D, on peut supposer que ABCD est direct.



Appelons a, b, c et d les affixes respectives de A, B, C et D. Alors :

- A est l'image de C par le quart de tour indirect de centre D, d'écriture complexe $z' = -i(z-d)+d$.
- B est l'image de D par le quart de tour direct de centre C, d'écriture complexe $z' = i(z-c)+c$.

On a donc :

- $a = -i(c-d)+d = -i(x_C + iy_C - x_D - iy_D) + x_D + iy_D = y_C - y_D + x_D + i(x_D - x_C + y_D)$.

  Or, x_C, y_C, x_D et y_D sont entiers, donc $y_C - y_D + x_D$ et $x_D - x_C + y_D$ aussi et :

  $$\boxed{\text{A est à coordonnées entières.}}$$

- $b = i(d-c)+c = i(x_D + iy_D - x_C - iy_C) + x_C + iy_C = x_C + y_C - y_D + i(x_D - x_C + y_C)$.

  Or, x_C, y_C, x_D et y_D sont entiers, donc $x_C + y_C - y_D$ et $x_D - x_C + y_C$ aussi et :

  $$\boxed{\text{B est à coordonnées entières.}}$$

Exercice 7

Quitte échanger l'ordre des points, on peut supposer que ABCDEFG est direct.

Quitte à translater, on peut supposer que ABCDEFG est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.

Quitte à effectuer une rotation, on peut supposer que l'affixe de A est R.

Appelons a, b, c et d les affixes respectives de A, B, C et D.

Comme ABCDEFG est un heptagone régulier convexe direct, OAB, OBC et OCD sont des triangles isocèles directs de sommet O, l'angle en O vaut $\frac{2\pi}{7}$ et OA = OB = OC = OD = R. On a alors :

$$a = R,\ b = Re^{i\frac{2\pi}{7}},\ c = Re^{i\frac{4\pi}{7}}\ \text{et}\ d = Re^{i\frac{6\pi}{7}}.$$

Alors :

- $AB = |b-a| = |Re^{i\frac{2\pi}{7}} - R| = R\,|e^{i\frac{2\pi}{7}} - 1| = R\,|e^{i\frac{\pi}{7}}(e^{i\frac{\pi}{7}} - e^{-i\frac{\pi}{7}})| = 2R\sin\frac{\pi}{7}$;
- $AC = |c-a| = |Re^{i\frac{4\pi}{7}} - R| = R\,|e^{i\frac{4\pi}{7}} - 1| = 2R\sin\frac{2\pi}{7}$;
- $AD = |d-a| = |Re^{i\frac{6\pi}{7}} - R| = R\,|e^{i\frac{6\pi}{7}} - 1| = 2R\sin\frac{3\pi}{7}$.

Et :

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{2R\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{2R\sin\frac{3\pi}{7}} - \frac{1}{2R\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}}{2R\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Or, $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ donc :

$$\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} &= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\right] + \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7}\right] - \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} - \frac{1}{AB} = 0$ soit :

$$\boxed{\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}}$$

Exercice 8

Appelons $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$, $c = e^{i\gamma}$ et $d = e^{i\delta}$ les quatre nombres complexes.

On a :

$$\begin{aligned}
& e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} + e^{i\delta} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{i\alpha} + e^{i\beta} = -(e^{i\gamma} + e^{i\delta}) \\
\Leftrightarrow\ & e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}) = -e^{i\frac{\gamma+\delta}{2}}(e^{i\frac{\gamma-\delta}{2}} + e^{-i\frac{\gamma-\delta}{2}}) \\
\Leftrightarrow\ & e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -e^{i\frac{\gamma+\delta}{2}}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} \quad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

En passant aux modules, on obtient $\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right| = \left|\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right|$.

Il y a alors trois possibilités :

- $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=0$, ce qui donne $\alpha=\beta+\pi\ [2\pi]$ donc $b=e^{i\beta}=e^{i\alpha}e^{i\pi}=-a$ et alors $d=-c$.

- $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{\gamma-\delta}{2}\ [2\pi] \quad\Rightarrow\quad \alpha-\beta=\pm(\gamma-\delta)\ [2\pi]$.

  Et **(1)** devient $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}=e^{i\left(\frac{\gamma+\delta}{2}+\pi\right)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\gamma+\delta}{2}+\pi\ [2\pi] \quad\Rightarrow\quad \alpha+\beta=\gamma+\delta\ [2\pi]$.

  On alors :

$$\begin{cases}\alpha-\beta=\gamma-\delta\ [2\pi]\\ \alpha+\beta=\gamma+\delta\ [2\pi]\end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases}\alpha-\beta=\delta-\gamma\ [2\pi]\\ \alpha+\beta=\gamma+\delta\ [2\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\gamma\ [\pi]\\ \beta=\delta\ [\pi]\end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases}\alpha=\delta\ [\pi]\\ \beta=\gamma\ [\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=-a\\ d=-b\end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases}d=-a\\ c=-b\end{cases}$$

- $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\left(\pi-\frac{\gamma-\delta}{2}\right)\ [2\pi] \quad\Rightarrow\quad \alpha-\beta=\pm(\gamma-\delta)\ [2\pi]$.

  Et **(1)** devient $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}=e^{i\frac{\gamma+\delta}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\gamma+\delta}{2}\ [2\pi] \quad\Rightarrow\quad \alpha+\beta=\gamma+\delta\ [2\pi]$.

  On se retrouve donc dans la situation précédente.

Finalement, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Les nombres sont opposés deux à deux.}}$$

Exercice 9

1) $\left(z^2+\frac{1}{2}z+1\right)^2-\frac{5}{4}z^2=z^4+\frac{1}{4}z^2+1+z^3+2z^2+z-\frac{5}{4}z^2=z^4+z^3+z^2+z+1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}f(z)&=z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)\\&=(z-1)\left[\left(z^2+\frac{1}{2}z+1\right)^2-\frac{5}{4}z^2\right]\\&=(z-1)\left(z^2+\frac{1}{2}z+1-\frac{\sqrt{5}}{2}z\right)\left(z^2+\frac{1}{2}z+1+\frac{\sqrt{5}}{2}z\right)\\&=(z-1)\left(z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1\right)\left(z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right)\end{aligned}$$

Les discriminants des deux trinômes sont tous deux strictement négatifs donc on ne peut pas factoriser davantage dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f(z)=(z-1)\left(z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1\right)\left(z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1\right)} \qquad \textbf{(1)}$$

2) Les racines complexes de f(z) sont les racines cinquièmes de l'unité donc, dans $\mathbb{C}$:

$$f(z)=(z-1)(z-e^{i\frac{2\pi}{5}})(z-e^{i\frac{4\pi}{5}})(z-e^{i\frac{6\pi}{5}})(z-e^{i\frac{8\pi}{5}}).$$

On peut reformuler en :

$$\boxed{f(z)=(z-1)(z-e^{i\frac{2\pi}{5}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{5}})(z-e^{i\frac{4\pi}{5}})(z-e^{-i\frac{4\pi}{5}})}$$

3) On a :

$$(z-e^{i\frac{2\pi}{5}})(z-e^{-i\frac{2\pi}{5}})=z^2-(e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}})z+1=z^2-2\cos\frac{2\pi}{5}z+1.$$

Et de même :

$$(z-e^{i\frac{4\pi}{5}})(z-e^{-i\frac{4\pi}{5}})=z^2-2\cos\frac{4\pi}{5}z+1.$$

Donc :

$$f(z)=(z-1)\left(z^2-2\cos\frac{2\pi}{5}z+1\right)\left(z^2-2\cos\frac{4\pi}{5}z+1\right) \qquad \textbf{(2)}.$$

Remarquons que $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ donc $0<\cos\frac{2\pi}{5}<1$ et $\frac{\pi}{2}<\frac{4\pi}{5}<\pi$ donc $-1<\cos\frac{2\pi}{5}<0$.

Par ailleurs, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$, donc par identification entre **(1)** et **(2)**, on obtient :

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}.$$

Comme, $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, on a $\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}}$, soit :

$$\boxed{\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}.$$

On a aussi $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$, donc :

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Soit :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}$$

Exercice 10

a. Il s'agit d'une équation bicarrée.

Le discriminant de $Z^2-(3+8i)Z-16+12i$ est $\Delta=(3+8i)^2-4(-16+12i)=9$ et les racines sont :

$$\frac{3+8i-3}{2}=4i=\left[\sqrt{2}(1+i)\right]^2 \quad \text{et} \quad \frac{3+8i+3}{2}=3+4i=(2+i)^2.$$

Donc :

$$z^4-(3+8i)z^2-16+12i=\left(z^2-\left[\sqrt{2}(1+i)\right]^2\right)\left(z^2-(2+i)^2\right).$$

Les solutions sont donc :

$$\boxed{\sqrt{2}(1+i),\ -\sqrt{2}(1+i),\ 2+i \ \text{ et } \ -(2+i).}$$

b. On a :

$$z^3-i=6(z+i) \quad \Leftrightarrow \quad z^3-6z-7i=0.$$

Une racine évidente est – i (car $(-i)^3=-i^3=i$). On peut donc écrire $z^3-6z-7i=(z+i)(az^2+bz+c)$.

Il est évident en développant que l'on devra avoir $a=1$ et $c=-7$ donc:

$$(z+i)(z^2+bz-7)=z^3+(b+i)z^2+(ib-7)z-7i=z^3-6z-7i \quad \Rightarrow \quad b=-i.$$

Ainsi :

$$z^3-6z-7i=(z+i)(z^2-iz-7).$$

Le discriminant de z^2-iz-7 est $\Delta=27$ et les racines sont $\dfrac{i+3\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{i-3\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions sont donc :

$$\boxed{-i,\ \frac{3\sqrt{3}+i}{2} \ \text{ et } \ \frac{-3\sqrt{3}+i}{2}.}$$

c. Remarquons déjà que :

$$4z^2+8|z|^2-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2=\frac{3-8|z|^2}{4}\in\mathbb{R}.$$

Donc les solutions de l'équations sont soit réelles, soit imaginaires purs.

- Si z est réel, on a :

$$4z^2+8|z|^2-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2=\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad z=\pm\frac{1}{2}.$$

- Si z est imaginaire pur, on a $z=ix$ avec x réel et :

$$4z^2+8|z|^2-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les solutions sont donc :

$$\boxed{\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \text{ et } \ -\frac{\sqrt{3}}{2}i.}$$

d. On a :

$$z^4 = z + \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z^4} = \overline{z + \overline{z}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z}^4 = z + \overline{z} \quad \Rightarrow \quad \overline{z}^4 = z^4 .$$

Donc z^4 est réel.

- Si $z^4 \geq 0$, z^2 est réel et z est réel ou imaginaire pur.
- Si $z^4 < 0$, z^2 imaginaire pur, et en remarquant que $(1+i)^2 = 2i$, on en déduit que :

$$z^2 = ki = \frac{1}{2}k(1+i)^2 = a(1+i)^2 \quad \Rightarrow \quad z = a(i+1) \text{ ou } ai(1+i) = a(i-1) \text{ avec a réel.}$$

Il y a donc quatre possibilités :

- Si $z = x$ est réel, alors l'équation devient $x^4 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = \sqrt[3]{2}$.
- Si $z = ix$ est imaginaire pur (avec x réel), l'équation devient $z^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$.
- Si $z = x(i+1)$ avec x réel, l'équation devient $-4x^4 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- Si $z = x(i-1)$ avec x réel, l'équation devient $-4x^4 = -2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Les solutions sont donc :

$$\boxed{0,\ \sqrt[3]{2},\ \frac{i-1}{\sqrt[3]{2}} \text{ et } -\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}.}$$

e. Il faut déjà que $z \neq 1$ et $z \neq -1$.

Posons $Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$, on a alors :

$$Z + \frac{1}{Z} = 2\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad Z^2 - 2\cos\alpha\, Z + 1 = 0.$$

Les racines de ce trinôme classique sont $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.

Donc on a :

- Soit $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{i\alpha}$ et $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$ avec k entier. On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}} \quad &\Leftrightarrow \quad (e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}} - 1)z = e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}} + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{\alpha+2k\pi}{2n}})z = e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{2n}} + e^{-i\frac{\alpha+2k\pi}{2n}} \\
&\Leftrightarrow \quad i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)z = \cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)
\end{aligned}$$

- Soit $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{-i\alpha}$ et $\frac{z+1}{z-1} = e^{-i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$ avec k entier. Et on a alors :

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{-i\frac{\alpha+2k\pi}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad -i\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)z = \cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)$$

Il convient maintenant de discuter suivant la nullité de $\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)$.

- Si $\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)\neq 0$, alors les solutions sont de la forme $i\cot an\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)$ avec $k\in[\![-(n-1)\,;n-1]\!]$.
- Si $\sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)=0$, on a $\frac{\alpha+2k\pi}{2n}=k'\pi$ avec k' entier, soit $\alpha=2(nk'-k)\pi=2K\pi$ avec K entier.

  Dans ce cas, $e^{i\alpha}=e^{-i\alpha}=1$ et l'équation initiale se transforme en $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$. Alors :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{z+1}{z-1}=e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad\Leftrightarrow\quad \cos\frac{k\pi}{n}=i\sin\frac{k\pi}{n}z.$$

  Et les solutions sont de la forme $-i\cot an\frac{k\pi}{n}$ avec k entier non multiple de n.

  Remarquons ces solutions ont la même forme que les précédentes, sauf qu'il faut k non nul ici.

Finalement, les solutions sont :

- $i\cot an\frac{k\pi}{n}$, avec $k\in[\![-(n-1)\,;n-1]\!]\setminus\{0\}$ si $\alpha=0\ [2\pi]$;
- $i\cot an\left(\frac{\alpha+2k\pi}{2n}\right)$, avec $k\in[\![-(n-1)\,;n-1]\!]$ si $\alpha=0\ [2\pi]$.

Exercice 11

a. On a $\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos x$, donc :

$$\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin 3x\cos x-\sin 3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin 3x\,(2\cos x-1)=0.$$

Donc :

- soit $\sin 3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x=0\ [\pi] \quad\Leftrightarrow\quad x=0\left[\frac{\pi}{3}\right]$;
- soit $\cos x=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

La deuxième possibilité étant englobée par la première :

$$\boxed{\text{Les solutions sont les multiples de } \frac{\pi}{3}.}$$

b. Il faut déjà que $\cos x\neq 0$ donc que $x\neq\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

On peut alors écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{ikx}}{\cos^k x}\right]=\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right].$$

Si $\dfrac{e^{ix}}{\cos x}=1 \Leftrightarrow e^{ix}=\cos x \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=0\ [\pi]$, on a $\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right]=n\neq 0$. Les multiples de π ne sont donc pas solution. On peut alors écrire :

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^n-1}{\dfrac{e^{ix}}{\cos x}-1}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{e^{inx}-\cos^n x}{i\tan x\cos^n x}\right]=\mathrm{Re}\left[-i\frac{\cos nx-\cos^n x+i\sin nx}{\tan x\cos^n x}\right]=\frac{\sin nx}{\tan x\cos^n x}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin nx=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0\ \left[\frac{\pi}{n}\right].$$

Cependant, il faut que $x\neq 0\ [\pi]$ et $x\neq\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont de la forme } k\frac{\pi}{n} \text{ avec k entier non multiple de n et distinct de } \frac{(2p+1)}{2}n \text{ avec p entier.}}$$

Remarquons que la deuxième condition ne pose pas de problème si n est impair.

Exercice 12

1) $\forall z\in\mathbb{U}_n$, $z^{pn}=(z^n)^p=1^p=1$ donc $z\in\mathbb{U}_{pn}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{U}_n\subset\mathbb{U}_{pn}}$$

Il est clair que si p = 1, $\mathbb{U}_n=\mathbb{U}_{pn}$.

Réciproquement, si $\mathbb{U}_n=\mathbb{U}_{pn}$, alors $n=\mathrm{Card}\,\mathbb{U}_n=\mathrm{Card}\,\mathbb{U}_{pn}=pn$ donc $n=pn$, soit p = 1.

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{U}_n=\mathbb{U}_{pn} \quad\Leftrightarrow\quad p=1}$$

2) Remarquons déjà que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\{1\}\subset\mathbb{U}_k$.

Posons $\mathrm{PGCD}(n,m)=d$. Il existe deux entiers n' et m' tels que $n=dn'$ et $m=dm'$.

D'après la question précédente, $\mathbb{U}_d\subset\mathbb{U}_{dn'}=\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_d\subset\mathbb{U}_{dm'}=\mathbb{U}_m$ donc $\{1\}\subset\mathbb{U}_d\subset\mathbb{U}_n\cap\mathbb{U}_m$.

On alors :

$$\mathbb{U}_n\cap\mathbb{U}_m=\{1\} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbb{U}_d=\{1\}.$$

Or, comme $\mathrm{Card}\,\mathbb{U}_d=d$, on a $\mathbb{U}_d=\{1\} \quad\Leftrightarrow\quad d=1$ et ainsi :

$$\boxed{\mathbb{U}_n\cap\mathbb{U}_m=\{1\} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{PGCD}(n,m)=1}$$

3) On vient de voir que si $\mathrm{PGCD}(n,m)=d$, on a $\underline{\mathbb{U}_d\subset\mathbb{U}_n\cap\mathbb{U}_m}$.

Reste à prouver l'inclusion réciproque.

D'après le théorème de Bézout, on peut trouver deux entiers naturels u et v tels que $u.n-v.m=d$, soit :

$$u.n = d + v.m .$$

Soit $z \in \mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$, on a $z^n = z^m = 1$ et :

- d'une part : $z^{d+v.m} = z^{u.n} = (z^n)^u = 1^u = 1$;
- d'autre part : $z^{d+v.m} = z^d z^{v.m} = z^d (z^m)^v = z^d 1^v = z^d$.

Donc $z^d = 1$ et ainsi $z \in \mathbb{U}_d$, donc $\underline{\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_d}$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_d}$$

Exercice 13

Remarquons déjà que :

$$\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 .$$

Soient A, B et C les points du plan complexes d'affixes respectives e^{ia}, e^{ib} et e^{ic}.

Si A et B sont confondus alors $e^{ia} = e^{ib}$ et $e^{ic} = -2e^{ia}$ donc $1 = |e^{ic}| = |-2e^{ia}| = 2$, ce qui est absurde.

De la même façon, A et C, B et C ne sont pas confondus, donc ABC est un triangle.

Quitte à renommer les points, on peur supposer que ABC est direct.

Les trois points sont sur le cercle trigonométrique donc O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

L'affixe du centre de gravité de ABC est $\dfrac{e^{ia} + e^{ib} + e^{ic}}{3} = 0$, donc O est aussi le centre de gravité de ABC.

Ceci implique que le triangle ABC est équilatéral et donc que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Alors, on a $e^{ib} = e^{i(a+\frac{2\pi}{3})} = e^{ia} e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{ic} = e^{i(b+\frac{2\pi}{3})} = e^{ib} e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{ia} e^{i\frac{4\pi}{3}}$, soit :

$$e^{ib} = j e^{ia} \quad \text{et} \quad e^{ic} = j^2 e^{ia} .$$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = e^{ina}(1 + j^n + j^{2n}) .$$

Et :

- Si $n = 3k$, alors $j^n = 1$ (car $j^3 = 1$) et $1 + j^n + j^{2n} = 1$ donc $e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = 3e^{ina}$.
- Si $n = 3k+1$, alors $j^n = j$ et $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j + j^2 = 0$ donc $e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = 0$.
- Si $n = 3k+2$, alors $j^n = j^2$ et $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^2 + j = 0$ donc $e^{ina} + e^{inb} + e^{inc} = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos na + \cos nb + \cos nc = \begin{cases} 3\cos na & \text{si n est multiple de 3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \sin na + \sin nb + \sin nc = \begin{cases} 3\sin na & \text{si n est multiple de 3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}}$$

Exercice 14

Posons $f(x)=e^x-x$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=e^x-1$.

- Sur $\mathbb{R}_-$, $f'(x)\leq 0$ donc f est décroissante.
- Sur $\mathbb{R}_+$, $f'(x)\geq 0$ donc f est croissante.

Ainsi, f admet un minimum global en 0, qui vaut $f(0)=1$.

Donc, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 1$, ce qui implique que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{\text{L'équation } e^z=z \text{ n'a pas de solution réelle.}}$$

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $e^z=z$ est beaucoup plus délicate à gérer…

Remarquons déjà que si $e^z=z$, alors $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}=\overline{z}$ donc si z_o est solution de $e^z=z$, $\overline{z}_o$ aussi.

Si on pose $z=x+iy$, on a :

$$e^z=z \quad\Leftrightarrow\quad e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=x+iy \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} e^x\cos y=x \\ e^x\sin y=y \end{cases}$$

D'après ce qui précède, si $x+iy$ est solution de $e^z=z$, alors $y\neq 0$ et $x-iy$ est aussi solution donc on peut supposer $y>0$.

Alors, $e^x\sin y=y$ entraine $\sin y>0$, soit, avec $y>0$, $2k\pi<y<(2k+1)\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{cases} e^x\cos y=x \\ e^x\sin y=y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{e^x\cos y}{e^x\sin y}=\dfrac{x}{y} \\ e^x\sin y=y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=y\dfrac{\cos y}{\sin y} \\ e^{y\frac{\cos y}{\sin y}}\sin y-y=0 \end{cases}.$$

Donc, si $x+iy$ est solution de $e^z=z$ si et seulement si $z=y\,\mathrm{cotan}\,y+iy$ avec $e^{y\frac{\cos y}{\sin y}}\sin y=y$.

Ceci prouve que $e^z=z$ admet des solutions complexes si et seulement si l'équation $e^{y\frac{\cos y}{\sin y}}\sin y=y$ admet des solutions dans $\mathbb{R}^*$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Posons $g(y)=e^{y\frac{\cos y}{\sin y}}\sin y-y$ définie sur $I_k=]2k\pi;(2k+1)\pi[$.

La fonction g est continue sur I_k par opérations.

Pour $y\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, on peut écrire $g(y)=\dfrac{e^{\frac{y\cos y}{\sin y}}}{\frac{y\cos y}{\sin y}}y\cos y-y$ et :

- $\begin{cases} \lim\limits_{y \to 2k\pi^+} y\cos y = 2k\pi \\ \lim\limits_{y \to 2k\pi^+} \sin y = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{y \to 2k\pi^+} \dfrac{y\cos y}{\sin y} = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$ (par croissances comparées)

  donc par composition, $\lim\limits_{y \to 2k\pi^+} \dfrac{e^{\frac{y\cos y}{\sin y}}}{\frac{y\cos y}{\sin y}} = +\infty$ et, par produit puis différence : $\underline{\lim\limits_{y \to 2k\pi^+} g(y) = +\infty}$.

- $\begin{cases} \lim\limits_{y \to (2k+1)\pi^-} y\cos y = -(2k+1)\pi \\ \lim\limits_{y \to (2k+1)\pi^-} \sin y = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Rightarrow} \lim\limits_{y \to (2k+1)\pi^-} \dfrac{y\cos y}{\sin y} = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{e^t}{t} = 0$ donc par composition,

  $\lim\limits_{y \to 2k\pi^+} \dfrac{e^{\frac{y\cos y}{\sin y}}}{\frac{y\cos y}{\sin y}} = 0$ et, par produit puis différence : $\underline{\lim\limits_{y \to (2k+1)\pi^-} g(y) = -(2k+1)\pi}$.

Alors, sur I_k, g est continue, $\lim\limits_{y \to 2k\pi^+} g(y) = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to (2k+1)\pi^-} g(y) = -(2k+1)\pi < 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel $y_k \in I_k$ tel que $g(y_k) = 0$.

Ainsi, $g(y) = 0$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc :

$$\boxed{\text{L'équation } e^z = z \text{ admet une infinité de solutions complexes.}}$$

Exercice 15

On a $\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Posons $z = x + iy$. On a alors :

$$e^z = \sqrt{3} + 3i \quad \Leftrightarrow \quad e^x e^{iy} = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x = 2\sqrt{3} \\ e^{iy} = e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \ln(2\sqrt{3}) \\ y = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{(avec k entier)} \end{cases}$$

Le solutions sont donc tous les nombres de la forme :

$$\boxed{\ln(2\sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad \text{(avec k entier)}.}$$

Exercice 16

1) Posons $f(x) = x^3 - 3x - 1$. f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

On obtient le tableau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Le théorème de la bijection assure que f s'annule une fois sur $]-\infty\,;-1[$, une fois sur $]-1\,;1[$ et une fois sur $]1\,;+\infty[$. Ainsi :

$$\boxed{x^3-3x-1 \text{ admet trois racines réelles.}}$$

2) On a $x^3=(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$ donc :

$$x^3-3x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad u^3+v^3+3uv(u+v)-3(u+v)-1=0\,.$$

Soit :

$$\boxed{u^3+v^3+3(uv-1)(u+v)-1=0}$$

3) Avec $uv=1$, l'équation précédente devient $u^3+v^3=1$.

On a aussi $u^3v^3=1$ donc u^3 et v^3 sont les racines de X^2-SX+P avec ici $S=P=1$.

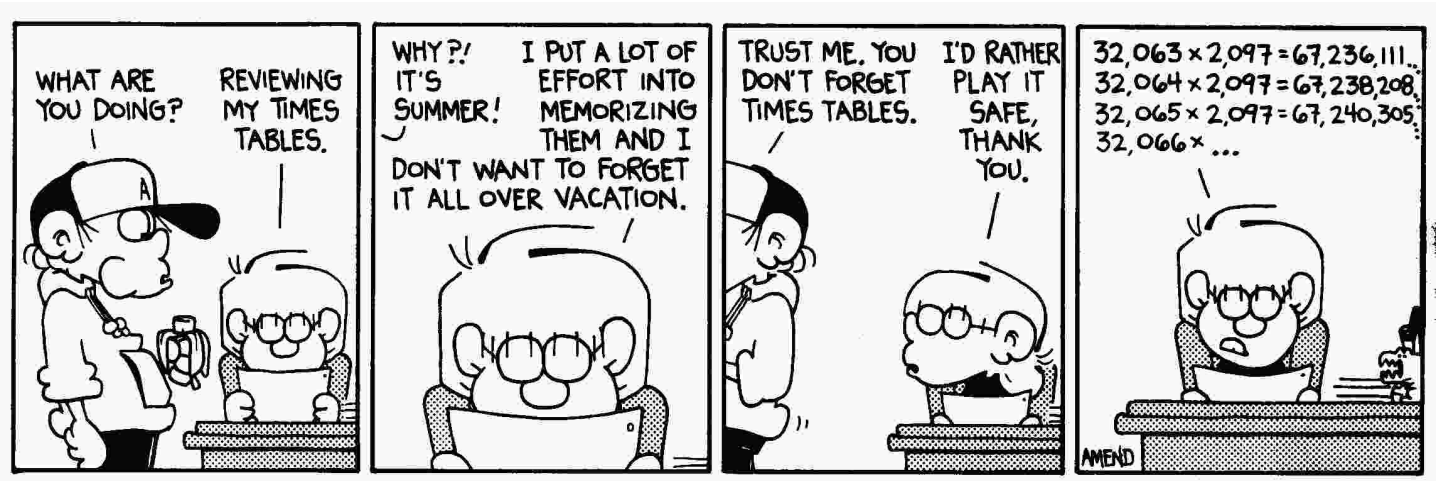
Le discriminant de X^2-X+1 vaut – 3 donc les deux racines complexes conjuguées sont :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } \frac{1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

4) On pose $u^3=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et comme $x=u+v$ doit être réel, on prend $v=\overline{u}$.

Avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on a $j^3=1$ donc, on obtient trois possibilités pour u :

- $u_1=e^{i\frac{\pi}{9}}$ et alors, $x_1=u_1+\overline{u}_1=2\cos\frac{\pi}{9}$;
- $u_2=e^{i\frac{\pi}{9}}j=e^{i\frac{\pi}{9}}e^{i\frac{2\pi}{3}}=e^{i\frac{7\pi}{9}}$ et alors, $x_2=u_2+\overline{u}_2=2\cos\frac{7\pi}{9}$;
- $u_3=e^{i\frac{\pi}{9}}j^2=e^{i\frac{\pi}{9}}e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{13\pi}{9}}$ et alors, $x_3=u_3+\overline{u}_3=2\cos\frac{13\pi}{9}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de (E) sont } 2\cos\frac{\pi}{9},\ 2\cos\frac{7\pi}{9} \text{ et } 2\cos\frac{13\pi}{9}.}$$