Corrigés des TD du Chapitre 2

Exercice 1

a. Posons $X = 2^x$

$$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 15 \\ e^x e^y e^z = e^6 \\ \ln(3^x 3^y) = \ln(3^z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 15 \\ x + y + z = 6 \\ x\ln 3 + y\ln 3 = z\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 15 \\ 2z = 6 \\ z = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y + 2^3 = 15 \\ z = 3 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{3-x} = 7 \\ z = 3 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + 8/X = 7 \\ z = 3 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 7X + 8 = 0 \\ z = 3 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

Les racines de $X^2 - 7X + 8 = 0$ sont $\dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$, toutes deux positives donc $2^x = \dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2}\right)$.

Finalement, il y a deux triplets solutions :

$$\boxed{\left(\log_2\left(\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right), 3 - \log_2\left(\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right), 3\right) \text{ et } \left(\log_2\left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right), 3 - \log_2\left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right), 3\right)}$$

b. Il faut que $y > 0$ et $z > 0$, sauf si x est rationnel à dénominateur impair.

$$\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2 \times 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2^{2x+1} \\ x + y + z = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^x = y^{2x} \\ z = 2x + 1 \\ x + y + 2x + 1 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ln(2x+1) = x\ln[(15-3x)^2] \\ z = 2x + 1 \\ y = 15 - 3x \end{cases}$$

Si $x = 0$, on obtient $y = 15$ et $z = 1$.

Si $x \neq 0$, la première équation du système se récrit $2x + 1 = (15 - 3x)^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 92x + 224 = 0$.

Les racines de ce trinôme sont 4 et $\dfrac{56}{9}$.

Finalement, il y a trois triplets solutions :

$$\boxed{(0,15,1), \quad (4,3,9) \quad \text{et} \quad \left(\frac{56}{9}, \frac{-11}{3}, \frac{121}{9}\right)}$$

c. Il faut que $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$. Posons $X = \ln x, Y = \ln y$ et $Z = \ln z$

$$\begin{cases} \ln(2xy) = \ln(x)\ln(y) \\ \ln(yz) = \ln(y)\ln(z) \\ \ln(2zx) = \ln(z)\ln(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln 2 + X + Y = XY \\ Y + Z = YZ \\ \ln 2 + X + Z = XZ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln 2 + X + Y = XY \\ Z = Y(Z-1) \\ Z + \ln 2 = X(Z-1) \end{cases}$$

Si Z = 1, on aboutit à des absurdités donc $Z \neq 1$ et le système devient :

$$\begin{cases} \ln 2 + \dfrac{Z+\ln 2}{Z-1} + \dfrac{Z}{Z-1} = \dfrac{Z+\ln 2}{Z-1}\dfrac{Z}{Z-1} \\ Y = \dfrac{Z}{Z-1} \\ X = \dfrac{Z+\ln 2}{Z-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Z-1)^2 = 1 \\ Y = \dfrac{Z}{Z-1} \\ X = \dfrac{Z+\ln 2}{Z-1} \end{cases}$$

On trouve alors $(X,Y,Z) = (-\ln 2, 0, 0)$ ou $(X,Y,Z) = (2+\ln 2, 2, 2)$ donc les solutions sont :

$$\boxed{(\frac{1}{2},1,1) \text{ et } (2e^2, e^2, e^2)}$$

Exercice 2

Il faut déjà que $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

De plus, le log en base 1 n'ayant pas de sens, il faut que $b \neq 1$ et $c \neq 1$.

On a alors :

$$\log_b a + \log_c a = 2\log_b a \log_c a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln a}{\ln b} + \frac{\ln a}{\ln c} = 2\frac{\ln a}{\ln b}\frac{\ln a}{\ln c} \quad \Leftrightarrow \quad \ln a(\ln b + \ln c) = 2(\ln a)^2 .$$

Si a = 1, l'égalité est toujours vraie.

Si $a \neq 1$, alors l'égalité se simplifie en :

$$\ln b + \ln c = 2\ln a \quad \Leftrightarrow \quad \ln bc = \ln a^2 \quad \Leftrightarrow \quad bc = a^2 .$$

Finalement, les triplets solutions sont :

$$\boxed{(\sqrt{bc}, b, c) \text{ avec } b > 0,\ c > 0,\ b \neq 1 \text{ et } c \neq 1.}$$

Exercice 3

a. Pour que f(x) soit défini, il faut que $x > 0$ et $\ln x > 0$, donc f est définie sur $]1;+\infty[$.

Sur $]1;+\infty[$, f est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables et $f(x) = e^{\ln x \ln(\ln x)}$ donc :

$$f'(x) = [\ln(\ln x) + 1]\frac{1}{x}e^{\ln x \ln(\ln x)}.$$

Sur $]1;+\infty[$, $\frac{1}{x}e^{\ln x \ln(\ln x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(\ln x) + 1$ et :

$$\ln(\ln x) + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x \geq e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \exp(e^{-1}) .$$

On a, de plus :

$$\lim_{x \to 1^+} \ln x \ln(\ln x) = \lim_{X \to 0^+} X \ln X = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

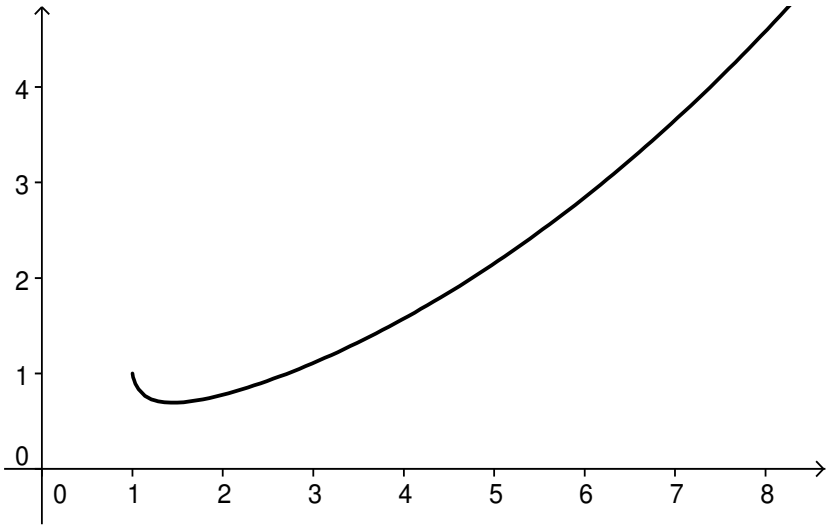
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x \ln(\ln x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f\left(\exp(e^{-1})\right) = e^{-e^{-1}}$$

On obtient le tableau :

x	1		$\exp(e^{-1})$		$+\infty$
f '(x)	‖	–	0	+	
f	‖ 1	↘	$e^{-e^{-1}}$	↗	$+\infty$

Et la courbe :



b. Pour que g(x) soit défini, il faut que $e^{4x} \neq 1$ soit $x \neq 0$, donc g est définie $\mathbb{R}^*$.

L'ensemble de définition de g est symétrique par rapport à 0 et $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$:

$$g(-x) = \frac{e^{-5x} + e^{x}}{e^{-4x} - 1} = \frac{e^{4x}(e^{-5x} + e^{x})}{1 - e^{4x}} = \frac{e^{-x} + e^{5x}}{1 - e^{4x}} = -\,g(x).$$

Donc g est impaire. On peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{5x}}{e^{4x}} \frac{1 + e^{-6x}}{1 - e^{-4x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{x} \frac{1 + e^{-6x}}{1 - e^{-4x}} = +\infty$$

Remarquons par ailleurs que l'on peut écrire $g(x) = \dfrac{(e^x)^5 + (e^x)^{-1}}{(e^x)^4 - 1} = \varphi(e^x)$ avec $\varphi(x) = \dfrac{x^5 + x^{-1}}{x^4 - 1} = \dfrac{x^6 + 1}{x^5 - x}$.

La fonction φ est rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables et :

$$g'(x) = e^x \varphi'(e^x) \text{ avec } \varphi'(x) = \frac{6x^5(x^5 - x) - (x^6 + 1)(5x^4 - 1)}{(x^5 - x)^2} = \frac{x^{10} - 5x^6 - 5x^4 + 1}{(x^5 - x)^2}.$$

Quand x décrit $\mathbb{R}_+^*$, e^x décrit $]1\,;+\infty[$ et sur cet intervalle $\varphi'(x)$ est du signe de $\psi(x) = x^{10} - 5x^6 - 5x^4 + 1$.

La fonction polynôme ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\psi'(x) = 10x^9 - 30x^5 - 20x^3 = 10x^3(x^6 - 3x^2 - 2) = 10x^3(x^2 + 1)^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Sur $]1;+\infty[$, $10x^3(x^2+1)^2(x+\sqrt{2})>0$ donc $\psi'(x)$ est du signe de $x-\sqrt{2}$, d'où le tableau :

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\psi'(x)$		$-$	0	$+$	
ψ	-8	↘	-27	↗	$+\infty$

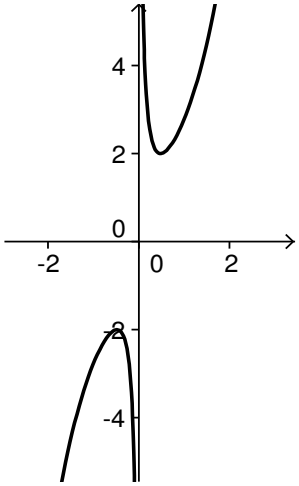
Le théorème de la bijection assure alors l'existence d'un réel $\alpha>\sqrt{2}$ tel que $\psi(\alpha)=0$ et :

- sur $]1;\alpha[$, $\psi(x)<0$ donc sur $]0;\ln\alpha[$, $g'(x)<0$;
- sur $]\alpha;+\infty[$, $\psi(x)>0$ donc sur $]\ln\alpha;+\infty[$, $g'(x)>0$.

on obtient le tableau de variations de g :

x	0		$\ln\alpha$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	$g(\ln\alpha)$	↗	$+\infty$

Et la courbe, complétée par symétrie par rapport à l'origine :



On aurait pu remarquer que $g(x)=\dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}=\dfrac{e^{3x}+e^{-3x}}{e^{2x}-e^{-2x}}=\dfrac{ch(3x)}{sh(2x)}=\dfrac{4sh^2x+1}{2sh\,x}$.

c. On a $h(x)=e^{(1+\frac{1}{x})\ln x}$ donc pour que h(x) soit défini, il faut que $x>0$ et h est définie $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables et :

$$h'(x)=\frac{x+1-\ln x}{x^2}e^{(1+\frac{1}{x})\ln x}.$$

$h'(x)$ est du signe de $\varphi(x)=x+1-\ln x$.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

- Sur $]0;1[$, $\varphi'(x)<0$ donc φ est décroissante ;
- sur $]1;+\infty[$, $\varphi'(x)>0$ donc φ est croissante.

Ainsi, φ admet un minimum en 1 qui vaut $\varphi(1)=2>0$, ce qui prouve que $\varphi(x)>0$ donc $h'(x)>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})\ln x=-\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0^+} h(x)=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})\ln x=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to +\infty} h(x)=+\infty$$

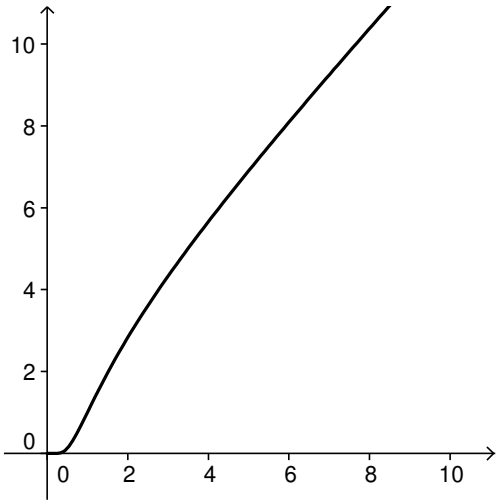
Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $h(x)\underset{x\to+\infty}{\approx} e^{\ln x}=x$.

Ceci nous suggère une asymptote oblique en + ∞. Tentons de le prouver.

On a $h(x)-x=x^{1+\frac{1}{x}}-x=x(x^{\frac{1}{x}}-1)=\ln x\dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}{\frac{\ln x}{x}}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$.

Mais comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(h(x)-x\big)=+\infty$ et finalement, il n'y a pas d'asymptote. On dit qu'il y a une direction asymptotique y = x en + ∞.

On a la courbe :



Exercice 4

La fonction Argch est définie sur $[1\,;+\infty[$, à images dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout x ≥ 1 :

$$\text{Argch}(x)=y \quad\Leftrightarrow\quad x=\text{ch}\,y=\frac{e^y+e^{-y}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2x=e^y+\frac{1}{e^y} \quad\Leftrightarrow\quad (e^y)^2-2xe^y+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (e^y-x)^2=x^2-1.$$

Donc $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$ ou $e^y=x-\sqrt{x^2-1}$.

Mais, $y\geq 0$ donc $e^y\geq 1$. Or, pour x ≥ 1, $x-\sqrt{x^2-1}-1=x-1-\sqrt{(x-1)(x+1)}=\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)<0$ donc la seconde solution est exclue et $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$.

Ainsi, $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ et donc :

$$\boxed{\text{Argch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})}$$

La fonction Argsh est définie sur $\mathbb{R}$, à images dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x :

$$\text{Argsh}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{sh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = e^y - \frac{1}{e^y} \quad \Leftrightarrow \quad (e^y)^2 - 2xe^y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (e^y - x)^2 = x^2 + 1.$$

Donc $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ ou $e^y = x - \sqrt{x^2+1}$.

Mais, $e^y > 0$. Or, pour tout x,, $x^2 < x^2+1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1} \Rightarrow x - \sqrt{x^2+1} < 0$ donc la seconde solution est exclue et $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$.

Ainsi, $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ et donc :

$$\boxed{\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})}$$

La fonction Argth est définie sur $]-1\,;1[$, à images dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in\,]-1\,;1[$:

$$\text{Argth}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{th}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \quad \Leftrightarrow \quad x(e^y + \frac{1}{e^y}) = e^y - \frac{1}{e^y} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Argth}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

Exercice 5

$\forall\, x \neq 0$:

$$\frac{2}{\text{th}(2x)} - \frac{1}{\text{th}\, x} = \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{(e^x + e^{-x})^2}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{th}\, x$$

Avec la formule précédente, on a $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\text{th}(2^k x) = \dfrac{2}{\text{th}(2^{k+1}x)} - \dfrac{1}{\text{th}(2^k x)}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\, \text{th}(2^k x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left[\frac{2}{\text{th}(2^{k+1}x)} - \frac{1}{\text{th}(2^k x)}\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{\text{th}(2^{k+1}x)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{\text{th}(2^k x)} = \frac{2^n}{\text{th}(2^n x)} - \frac{2^0}{\text{th}(2^0 x)}$$

Soit :

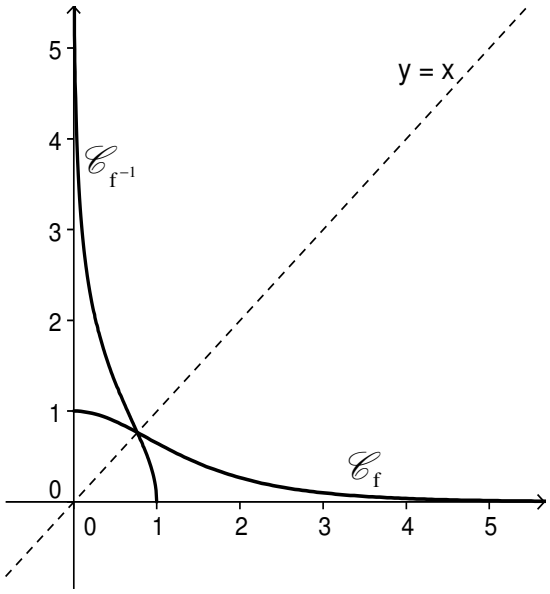
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\, \text{th}(2^k x) = \frac{2^n}{\text{th}(2^n x)} - \frac{1}{\text{th}\, x}}$$

Exercice 6

1) Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction ch est continue, strictement croissante et positive, donc f est continue et strictement décroissante donc bijective. Et, $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc $f(\mathbb{R}_+)=]0\,;1]$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction f réalise une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ vers }]0\,;1].}$$

2) On a les courbes :



Ces courbes sont symétriques par rapport à y = x.

3) $\forall\, y\in\,]0\,;1]$, on a $f\left(f^{-1}(y)\right)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(f^{-1}(y)\right)}=y$ donc :

$$\operatorname{ch}\left(f^{-1}(y)\right)=\frac{1}{y}.$$

Alors, $\operatorname{sh}^2\left(f^{-1}(y)\right)=\operatorname{ch}^2\left(f^{-1}(y)\right)-1=\dfrac{1}{y^2}-1$. Or, $f^{-1}(y)\geq 0$, donc $\operatorname{sh}\left(f^{-1}(y)\right)\geq 0$ et ainsi :

$$\operatorname{sh}\left(f^{-1}(y)\right)=\sqrt{\frac{1}{y^2}-1}.$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (comme inverse d'une telle fonction) et :

$$f'(x)=-\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

On a $f'(0)=0$ et $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow x=1$, donc f^{-1}, qui est définie sur $]0\,;1]$ n'est pas dérivable en 1, mais l'est sur $]0\,;1[$ avec :

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=-\frac{\operatorname{ch}^2\left(f^{-1}(x)\right)}{\operatorname{sh}\left(f^{-1}(x)\right)}=-\frac{1}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2-x^4}}.$$

On aurait aussi pu remarquer que $f^{-1}(x)=\operatorname{Argch}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 7

a. $$\begin{aligned} \mathrm{sh}^2x\cos^2y+\mathrm{ch}^2x\sin^2y &= \mathrm{sh}^2x\cos^2y+(1+\mathrm{sh}^2x)\sin^2y \\ &= \mathrm{sh}^2x\cos^2y+\sin^2y+\mathrm{sh}^2x\sin^2y \\ &= \mathrm{sh}^2x(\cos^2y+\sin^2y)+\sin^2y \\ &= \mathrm{sh}^2x+\sin^2y \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} \mathrm{ch}^2x\cos^2y+\mathrm{sh}^2x\sin^2y &= (1+\mathrm{sh}^2x)\cos^2y+\mathrm{sh}^2x\sin^2y \\ &= \cos^2y+\mathrm{sh}^2x\cos^2y+\mathrm{sh}^2x\sin^2y \\ &= \cos^2y+\mathrm{sh}^2x \end{aligned}$$

Exercice 8

a. Posons $f(x)=\arccos\big(\cos(3x)\big)$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\frac{2\pi}{3}$-périodique .

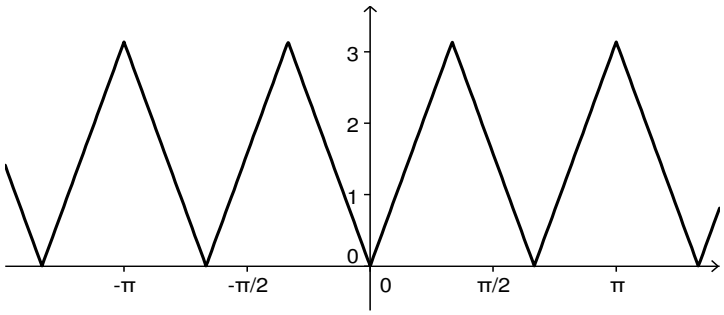
De plus, on a :

$$\arccos(\cos a)=\begin{cases} a & \text{si } a\in[0\,;\pi] \\ 2\pi-a & \text{si } a\in\,]\pi\,;2\pi[\end{cases}$$

Donc :

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } a\in\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \\ 2\pi-3x & \text{si } a\in\left]\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right[\end{cases}$$

On obtient le graphe :



b. Posons $g(x)=\sin\big(2\arctan x\big)$.

La fonction g est définie, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de telles fonctions et :

$$g'(x)=\frac{2}{x^2+1}\cos\big(2\arctan x\big).$$

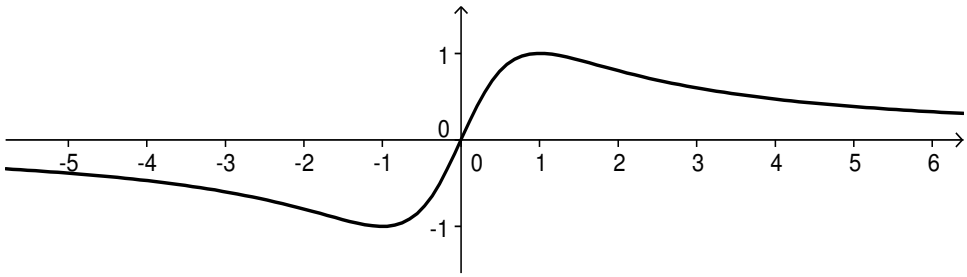
Comme $\frac{2}{x^2+1}>0$, $g'(x)$ est du signe de $\cos\big(2\arctan x\big)$.

Par ailleurs, on a $g(0)=\sin 0=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right)=0$.

On obtient le tableau sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		1		$+\infty$
$2\arctan x$	0	$0 < 2\arctan x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < 2\arctan x < \pi$	π
$\cos(2\arctan x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Et la courbe :



Exercice 9

1) Posons $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme de telles fonctions et :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc f est constante sur tout intervalle inclus dans son en ensemble de définition, en particulier $\mathbb{R}_+^*$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\frac{1}{x} = \arctan 0 = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Ceci prouve que $\forall\, x > 0$, on a $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Comme f est impaire, on a $\forall\, x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$, soit $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Finalement, on a bien $\forall\, x \neq 0$:

$$\boxed{\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}}$$

2) Nous avons la formule $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.

En posant $A = \arctan a$, $B = \arctan b$ et $C = \arctan a + \arctan b$, on a $\tan A = a$, $\tan B = b$ et :

$$\tan C = \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{a+b}{1-ab} \quad \Rightarrow \quad \arctan(\tan C) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

Pour évaluer $\arctan(\tan C)$, il faut prendre des précautions. En effet, on a $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < B < \frac{\pi}{2}$ donc $-\pi < C = A + B < \pi$ et :

$$\arctan(\tan C) = \begin{cases} C+\pi & \text{si } -\pi < C < -\frac{\pi}{2} \\ C & \text{si } -\frac{\pi}{2} < C < \frac{\pi}{2} \\ C-\pi & \text{si } \frac{\pi}{2} < C < \pi \end{cases}$$

Considérons cinq cas et utilisons la croissance de la fonction tangente et la formule de la question 1 :

- $a = 0$, alors $\arctan b = \arctan\left(\frac{0+b}{1-0}\right)$ et $\varepsilon_{a,b} = 0$.
- $a > 0$ et $ab > 1$. Alors :
  $b > \frac{1}{a} \Rightarrow \arctan b > \arctan\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} - \arctan a \Rightarrow C > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctan(\tan C) = C - \pi$ et $\varepsilon_{a,b} = \pi$.
- $a > 0$ et $ab < 1$. Alors, $\arctan a > 0$ donc $C > \arctan b > -\frac{\pi}{2}$ et :
  $b < \frac{1}{a} \Rightarrow \arctan b < \arctan\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} - \arctan a \Rightarrow C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctan(\tan C) = C$ et $\varepsilon_{a,b} = 0$.
- $a < 0$ et $ab > 1$. Alors :
  $b < \frac{1}{a} \Rightarrow \arctan b < \arctan\frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2} - \arctan a \Rightarrow C < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctan(\tan C) = C + \pi$ et $\varepsilon_{a,b} = -\pi$.
- $a < 0$ et $ab < 1$. Alors, $\arctan a < 0$ donc $C < \arctan b < \frac{\pi}{2}$ et :
  $b > \frac{1}{a} \Rightarrow \arctan b > \arctan\frac{1}{a} = -\frac{\pi}{2} - \arctan a \Rightarrow C > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctan(\tan C) = C$ et $\varepsilon_{a,b} = 0$.

On peut résumer ces résultats en :

$$\boxed{\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \varepsilon_{a,b} \quad \text{avec } \varepsilon_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{si } ab < 1 \\ \pi & \text{si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ -\pi & \text{si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}}$$

3) Posons $g(x) = \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1)$.

On cherche alors à résoudre $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

La fonction g est la somme de trois fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ donc, elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $g(0) = \arctan(-1) + \arctan 1 = 0 < \frac{\pi}{2}$ et $g(1) = \arctan 1 + \arctan 2 > \frac{\pi}{2}$ car $\arctan 2 > \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Alors, le théorème de la bijection assure que l'équation $g(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une unique solution strictement comprise entre 0 et 1.

Soit maintenant $0 < x < 1$. On a, $(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < 1$, donc, d'après les questions précédentes :

$$g(x) = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad \arctan\left(\frac{x-1+x+1}{1-(x^2-1)}\right) = \arctan\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \arctan\left(\frac{2x}{2-x^2}\right) = \arctan\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2-x^2} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{2}{3}$$

Et, avec $0 < x < 1$, on obtient $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Finalement :

$$\boxed{\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2} \text{ admet une unique solution } x = \sqrt{\frac{2}{3}}.}$$

4) En posant $a = b$ avec $a^2 < 1$ dans la formule obtenue question 2, on obtient :

$$2\arctan a = \arctan\left(\frac{2a}{1-a^2}\right).$$

Avec $a = \frac{1}{5}$, on a $a^2 < 1$ et $\frac{2a}{1-a^2} = \frac{5}{12}$ donc :

$$\boxed{\arctan\frac{5}{12} = 2\arctan\frac{1}{5}}$$

En prenant, $a = \frac{5}{12}$, on a $a^2 < 1$ et $\frac{2a}{1-a^2} = \frac{120}{119}$ donc $2\arctan\frac{5}{12} = \arctan\frac{120}{119}$ et :

$$4\arctan\frac{1}{5} = 2\arctan\frac{5}{12} = \arctan\frac{120}{119}.$$

Alors :

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{120}{119} + \arctan\frac{-1}{239}.$$

Et $\frac{120}{119} \times \frac{-1}{239} < 1$ donc :

$$\arctan\frac{120}{119} + \arctan\frac{-1}{239} = \arctan\left(\frac{\frac{120}{119} + \frac{-1}{239}}{1 - \frac{120}{119} \times \frac{-1}{239}}\right) = \arctan\left(\frac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239 + 120}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 10

Posons $f(x) = \arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} - \operatorname{sgn}(x)\arctan(\operatorname{sh} x)$.

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$, qui est symétrique par rapport à 0 et $\forall\, x \neq 0$:

$$f(-x) = \arccos\frac{1}{\operatorname{ch}(-x)} - \operatorname{sgn}(-x)\arctan\big(\operatorname{sh}(-x)\big) = \arccos\frac{1}{\operatorname{ch} x} + \operatorname{sgn}(x)\arctan\big(-\operatorname{sh} x\big) = f(x).$$

Donc, f est paire.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} - \arctan(\operatorname{sh} x)$ et f est dérivable en tant que différence de composées de fonctions dérivables sur des intervalles adéquats, avec :

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} - \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} - \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}} - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0.$$

Ainsi, f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch} 0} - \arctan(\operatorname{sh} 0) = \arccos 1 - \arctan 0 = 0$, ce qui prouve que f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par parité, f est aussi nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et finalement, on a $\forall\, x \neq 0$, $f(x) = 0$, soit :

$$\boxed{\arccos\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{sgn}(x)\arctan(\operatorname{sh} x)}$$