Chapitre 3 : Rappels de géométrie plane

Produit Scalaire

Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

Notation : $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Propriétés :

- Si A, B, C et D sont quatre points, avec $A \neq B$ et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB) alors :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}.$$

- *Commutativité ou symétrie* : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
- *Associativité* : $(a\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(a\vec{v}) = a\vec{u}.\vec{v}$.
- *Distributivité* : $\vec{w}.(\vec{v}+\vec{u}) = \vec{w}.\vec{v} + \vec{w}.\vec{u}$.

  Ces deux dernières se résument en *bilinéarité* : $\vec{w}.(a\vec{v}+b\vec{u}) = a\vec{w}.\vec{v} + b\vec{w}.\vec{u}$.
- *Les identités remarquables fonctionnent.*
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Théorème fondamental : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls :

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Expression analytique : Dans un repère *orthonormé*, avec $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$:

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'.$$

Conséquence : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Relations métriques dans un triangle ABC :

- Relations d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{A}$$
$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\widehat{B}$$
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos\widehat{C}$$

- Théorème de la médiane :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2 \quad \text{avec } I = \text{mil}[BC]$$

Transformations du plan

Symétries axiales** ou **réflexions	***Translations***
D est une droite. La réflexion d'axe D est la transformation du plan qui a tout point M associe M' tel que D soit la médiatrice de [MM']. *Remarque* : Si s est une isométrie avec $s \neq id$: s est une réflexion si et seulement si $s \circ s = id$.	$\vec{u}$ est un vecteur. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan qui a tout point M associe M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
Rotations	***Homothéties***
O est un point et α un angle orienté. La rotation de centre O et d'angle α est la transformation du plan qui a tout point M associe M' tel que : $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$. *Remarques* : • Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, on parle de *quart de tour* direct ou indirect. • Si $\alpha = \pi$, on a affaire à une *symétrie centrale*, on parle aussi de *demi tour*.	O est un point et k un réel différent de 0. L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation du plan qui a tout point M du plan associe M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. *Remarque* : • Si $k = 1$, c'est l'identité. • Si $k = -1$, c'est la symétrie centrale de centre O.

Propriété et définition : Translations, rotations et réflexions sont des **isométries** car elles conservent les distances (et les aires).

Dans le plan, il y a quatre types d'isométries, divisés en deux groupes

- Les déplacements : les translations et les rotations.
- Les antidéplacements : les réflexions et les glissements (composées d'une réflexion et d'une translation).

Propriétés communes :

- Toutes ces transformations conservent les angles *géométriques* (les déplacements et les homothéties conservent les angles *orientés*, les antidéplacements les transforment en leur opposé).

  On dit que les translations et les rotations sont des déplacements,
- Toutes ces transformations conservent l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité.
- Toutes ces transformations conservent les formes en général . En particulier, l'image d'une droite est une droite, l'image d'un segment est un segment, l'image d'un cercle est un cercle (de même rayon pour les isométries).
- L'image d'un barycentre est le barycentre des images (milieux, centres de gravité, …)

Complément : Similitudes directes

Une <u>similitude directe</u> est la composée d'une rotation et d'une homothétie.

Elle est caractérisée par son centre Ω, son angle α et son rapport $k > 0$.

Par une similitude directe, tout point M a pour image M' tel que :

$$\Omega M' = k\Omega M \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha .$$

Son écriture complexe est de la forme :

$$z' = az + b = ke^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega .$$

avec $a \neq 1$.

On a donc $k = |a|$, $\alpha = \arg(a)$ et W est le seul point invariant, donc $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Les propriétés des similitudes directes sont grosso-modo les propriétés communes aux rotations et homothéties.

Attention : Ce ne sont pas des isométries.

Barycentres

<u>Définitions</u> :

- Si A est un point et α un réel, on dit que (A, α) est un <u>point pondéré</u>.
- Si $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), ..., (A_n, \alpha_n)$ sont des points pondérés tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

  Ce point est le <u>barycentre</u> des n points pondérés, noté $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)\} = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{array}\right)$.
- Si $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n \neq 0$, on parle d'<u>isobarycentre</u>.

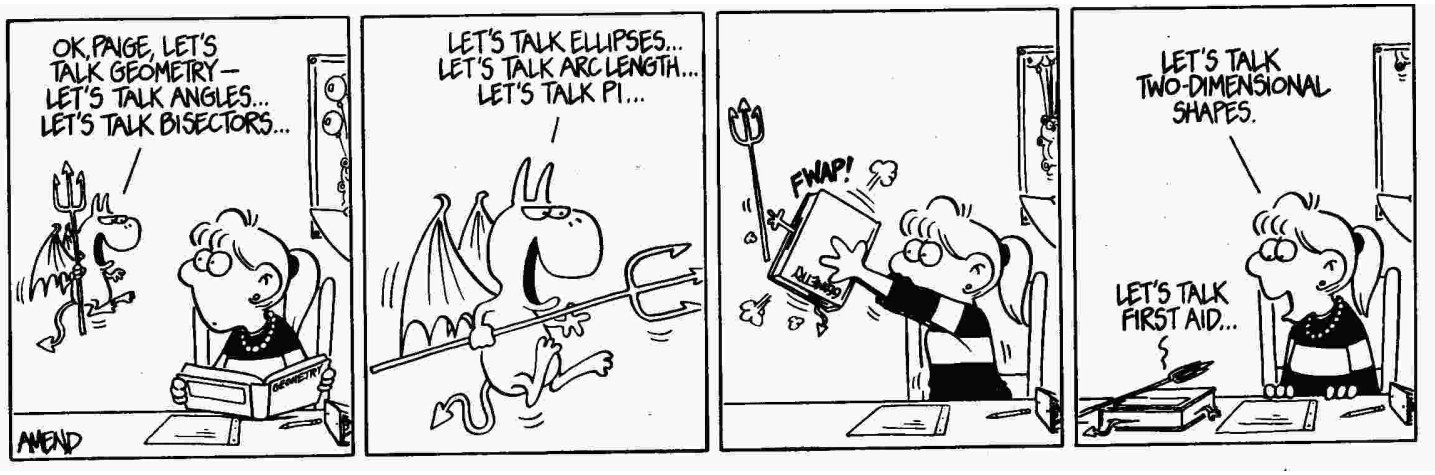
<u>Propriétés</u> :

- Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{GM} = \dfrac{\alpha_1 \overrightarrow{A_1M} + \alpha_2 \overrightarrow{A_2M} + ... + \alpha_n \overrightarrow{A_nM}}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$.
- Dans un repère quelconque du plan :

$$x_G = \frac{\alpha_1 x_{A_1} + \alpha_2 x_{A_2} + ... + \alpha_n x_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha_1 y_{A_1} + \alpha_2 y_{A_2} + ... + \alpha_n y_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} .$$

- *Homogénéité* : pour tout réel $k \neq 0$, $\text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{array}\right) = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdots & A_n \\ \hline k\alpha_1 & \cdots & k\alpha_n \end{array}\right)$.
- *Associativité* : Si $K = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & \cdots & A_p \\ \hline \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{array}\right)$ alors :

$$\text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \cdots & A_p & A_{p+1} & \cdots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \cdots & \alpha_p & \alpha_{p+1} & \cdots & \alpha_n \end{array}\right) = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c|c|c} K & A_{p+1} & \cdots & A_n \\ \hline \alpha_1 + ... + \alpha_p & \alpha_{p+1} & \cdots & \alpha_n \end{array}\right).$$


OK, PAIGE, LET'S TALK GEOMETRY— LET'S TALK ANGLES... LET'S TALK BISECTORS...
GEOMETRY
AMEND
LET'S TALK ELLIPSES... LET'S TALK ARC LENGTH... LET'S TALK PI...
FWAP!
LET'S TALK TWO-DIMENSIONAL SHAPES.
LET'S TALK FIRST AID...