Chapitre 4 : Rappels sur l'intégration

Intégration

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle $[a\,;b]$ de courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

- Si f est positive, $\int_a^b f(t)dt$ désigne l'aire de la surface comprise entre (Ox), $\mathscr{C}$ et les droites verticales d'équation x = a et x = b.
- Si f est de signe quelconque, $\int_a^b f(t)dt$ désigne la somme des aires entre $\mathscr{C}$ et (Ox) quand f est positive moins la somme des aires entre $\mathscr{C}$ et (Ox) quand f est négative.

<u>Propriétés</u> :

Soient f et g des fonctions *continues* sur un intervalle $[a\,;b]$.

- f admet des primitives F sur $[a\,;b]$ et :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

- *Linéarité* : Pour tous réels λ et μ :

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)]dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt.$$

- *Relation de Chasles* : Pour tout $c \in [a\,;b]$:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

- *Par convention* :

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

- *Intégration par parties* : Si f et g sont dérivables et à dérivées continues :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Tableau de primitives

Par définition, si f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I telle que F' = f.

Une fonction continue possède une infinité de primitives et deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Fonction	*Primitive*	*Intervalle*	*Commentaires*
$\lambda f + \mu g$	$\lambda F + \mu G + cste$	I	I = intervalle sur lequel f et g sont continues. λ et μ réels fixés.
$t \mapsto f(at+b)$	$t \mapsto \frac{1}{a}F(at+b) + cste$	I	I = intervalle sur lequel $t \mapsto f(at+b)$ est continue.
$t \mapsto u'(t)f\left(u(t)\right)$	$t \mapsto F\left(u(t)\right) + cste$	I	I = intervalle sur lequel $t \mapsto f\left(u(t)\right)$ et $t \mapsto u'(t)$ sont continues.
$t \mapsto t^{\alpha}$ avec $\alpha \neq -1$	$t \mapsto \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cste$	$\mathbb{R}_+^*$	Peut se prolonger à $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_-^*$ suivant les valeurs de α.
$t \mapsto \frac{1}{t}$	$t \mapsto \ln t + cste$	$\mathbb{R}_+^*$	$t \mapsto \ln\lvert t\rvert + cste$ sur $\mathbb{R}_-^*$.
$t \mapsto e^t$	$t \mapsto e^t + cste$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \ln t$	$t \mapsto t\ln t - t + cste$	$\mathbb{R}_+^*$	S'obtient par parties.
$t \mapsto \cos t$	$t \mapsto \sin t + cste$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \sin t$	$t \mapsto -\cos t + cste$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \tan t$	$t \mapsto \ln\lvert\cos t\rvert + cste$	I	I = intervalle ne contenant pas de multiple impaire de $\pi/2$.
$t \mapsto \operatorname{ch} t$	$t \mapsto \operatorname{sh} t + cste$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \operatorname{sh} t$	$t \mapsto \operatorname{ch} t + cste$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \operatorname{th} t$	$t \mapsto \ln\left(\operatorname{ch} t\right) + cste$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$	$t \mapsto \operatorname{Arctan} t + cste$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$t \mapsto \operatorname{Argsh} t + cste$	$\mathbb{R}$	
$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$	$t \mapsto \operatorname{Argch} t + cste$	$]1;+\infty[$	
$t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$	$t \mapsto \operatorname{Argth} t + cste$	$]-1;1[$	
$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$t \mapsto -\operatorname{Arccos}(t) + cste$ ou $t \mapsto \operatorname{Arcsin}(t) + cste$	$]-1;1[$	