

## Corrigé du DS n° 1

### Exercice 1

1) Sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $f$  est la composée de  $h : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$  qui est rationnelle, définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par la fonction  $\text{th}$  qui est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Comme  $f$  est définie en  $-1$  (avec  $f(-1) = 1$ ), on peut conclure que :

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

2) Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , elle y est continue. Mais :

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \text{th} X = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 = f(-1)$  ;
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} \text{th} X = -1$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 \neq f(-1)$ .

Ainsi :

$f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et continue à gauche mais pas à droite en  $-1$ .

3) Avec les notations de la question 1, on a  $f(x) = \text{th}(h(x))$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  donc :

$$f'(x) = \frac{h'(x)}{\text{ch}^2(h(x))} = \frac{2}{(x+1)^2 \text{ch}^2(h(x))} > 0.$$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; -1[$  et strictement croissante sur  $] -1; +\infty[$ .

De plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \text{th}(1)$ . Avec les limites en  $-1$  vues plus haut, on obtient le tableau :

x	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
f	$\text{th}(1)$	$1$	$\text{th}(1)$

4) On a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \text{th}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Donc :

L'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution :  $x_0 = 1$ .

On a alors  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = \frac{2}{2^2 \text{ch}^2(0)} = \frac{1}{2}$  donc :

L'équation réduite de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_0 = 1$  est  $y = \frac{1}{2}(x-1)$ .

5) Pour  $x \neq -1$  et, on a  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$ . Pour  $x \neq 1$ , on peut alors écrire :

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{(x-1)^2} \left[ \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\operatorname{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} \right]^2.$$

Alors :

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \frac{2}{(-2)^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{X}{\operatorname{ch} X} \right]^2 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{X}{e^X} \frac{2}{1+e^{-2X}} \right]^2 = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{X}{e^X} \right]^2.$

Or, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 0$ .

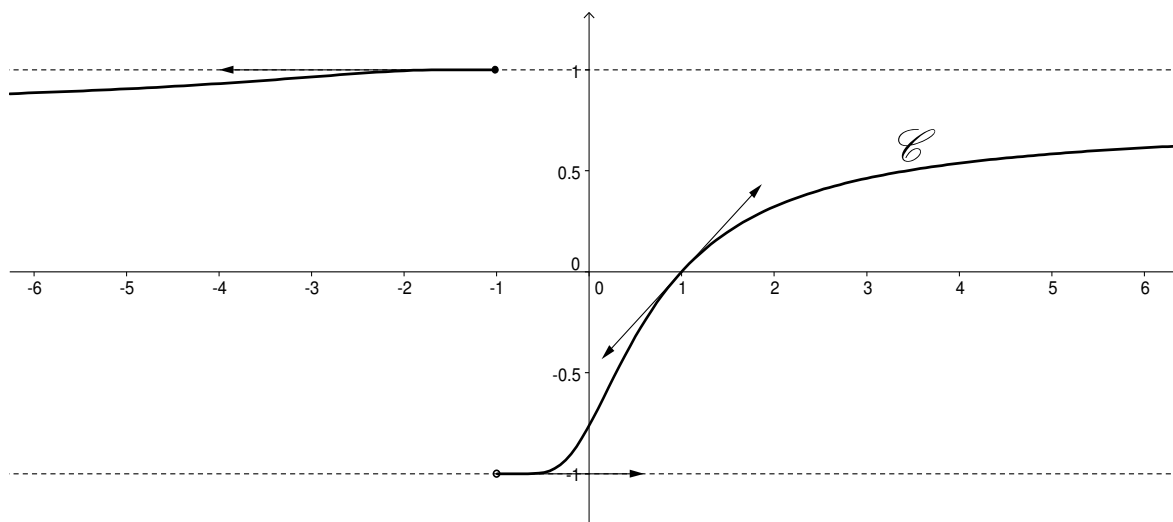
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \frac{2}{(-2)^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{X}{\operatorname{ch} X} \right]^2 = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{X}{e^{-X}} \frac{2}{e^{2X} + 1} \right]^2 = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{X}{e^{-X}} \right]^2.$

Or, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{X}{e^{-X}} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 0$ .

Ces résultats impliquent que :

$\mathcal{C}$  admet des demi-tangentes horizontales à gauche et à droite au point d'abscisse  $x = -1$ , d'équations respectives  $y = 1$  et  $y = -1$ .

6) Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \operatorname{th}(1)$ , la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = \operatorname{th}(1)$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . On obtient le graphique :



### Exercice 2

1) Les fonctions arccos et arcsin sont toutes deux définies sur  $[-1;1]$ . Or,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x$  et  $\sin x$  sont compris entre  $-1$  et  $1$  donc :

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2) On a  $\forall x \in \mathbb{R}, x + 2\pi \in \mathbb{R}$  et les fonctions cosinus et sinus sont  $2\pi$ -périodiques, donc :

$f$  est  $2\pi$ -périodique.

3) C'est une question de cours.

4)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \arccos(\cos x) + \arcsin(\sin x).$$

Or, d'après la question précédente,  $\forall t \in [-1; 1]$ ,  $\arccos(t) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(t)$  et  $\arcsin(t) = \frac{\pi}{2} - \arccos(t)$ , donc :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos x)\right] + \left[\frac{\pi}{2} - \arccos(\sin x)\right] = \pi - \arcsin(\cos x) - \arccos(\sin x).$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - f(x).$$

Pour  $x \in \mathbb{R}$  quelconque, soient les points  $M(x, f(x))$  et  $M'\left(\frac{\pi}{2} - x, f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ . Ces points sont sur  $\mathcal{C}$  et :

$$\frac{x_M + x_{M'}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{y_M + y_{M'}}{2} = \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \frac{1}{2}[f(x) + \pi - f(x)] = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci implique que le milieu de  $[MM']$  est le point  $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  donc que  $M$  et  $M'$  sont symétriques par rapport au point fixe  $A$ . Ceci étant vrai  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

Le point  $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  est centre de symétrie de  $\mathcal{C}$ .

5)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= \arccos\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) + \arcsin\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= \arccos\left(\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)\right) + \arcsin\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= \arccos\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + \arcsin\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \end{aligned}$$

Or,  $\forall t \in [-1; 1]$ ,  $\arccos(-t) = \pi - \arccos(t)$  et  $\arcsin(-t) = -\arcsin(t)$ , donc :

$$f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \pi - \arccos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Et on a vu que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi - f(x)$  donc  $\pi - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$  et ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = f(x).$$

Ceci veut dire que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , les points de  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives  $x$  et  $\frac{3\pi}{2} - x$  ont même ordonnée ( $f(x)$ ), donc ces points sont symétriques par rapport à la droite verticale passant par leur milieu, qui a pour abscisse  $\frac{1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{4}$ . Ainsi, les deux points sont symétriques par rapport à la droite verticale d'équation  $x = \frac{3\pi}{4}$ , ce qui prouve que :

$$\mathcal{C} \text{ est symétrique par rapport à la droite d'équation } x = \frac{3\pi}{4}.$$

6) La  $2\pi$ -périodicité de  $f$  nous permet d'étudier  $f$  sur n'importe quel intervalle de longueur  $2\pi$ , par exemple sur  $\left[\frac{3\pi}{4} - \pi; \frac{3\pi}{4} + \pi\right]$ . Cet intervalle étant centré en  $\frac{3\pi}{4}$ , la symétrie axiale nous permet d'étudier la fonction  $f$  sur  $\left[\frac{3\pi}{4} - \pi; \frac{3\pi}{4}\right] = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ . Ce nouvel intervalle est centré en  $\frac{\pi}{4}$  donc la symétrie centrale nous permet d'étudier  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ . Ainsi :

$$\text{On peut étudier } f \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

Remarquons que  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right).$$

Par ailleurs, on sait que  $\arccos(\cos a) = a$  pour  $a \in [0; \pi]$  et  $\arcsin(\sin a) = a$  pour  $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  donc les deux égalités sont vraies pour  $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Alors  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , on a  $\frac{\pi}{2} - x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $f(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2} - x = \pi - 2x$ .

Reste à voir ce qu'il se passe sur  $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ . Remarquons que  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ , on a  $x + \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et, comme  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$  et  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ , on a  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$  :

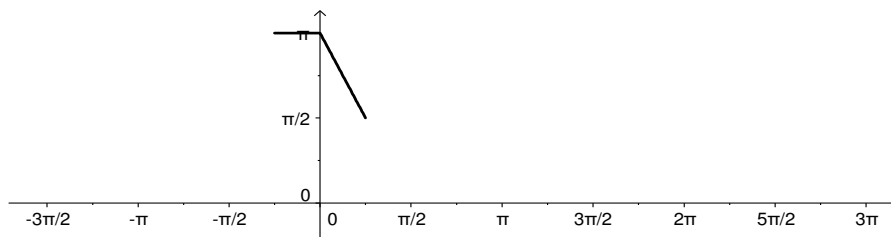
$$\begin{aligned} f(x) &= \arccos(\sin x) + \arcsin(\cos x) = \arccos\left(-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \pi - \arccos\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \arcsin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi - \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

Finalement :

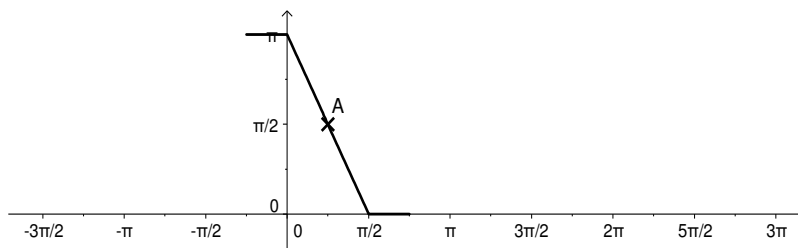
$$\begin{aligned} \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right], \quad f(x) &= \pi \\ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \quad f(x) &= \pi - 2x \end{aligned}$$

7) On construit alors la courbe  $\mathcal{C}$  en quatre étapes :

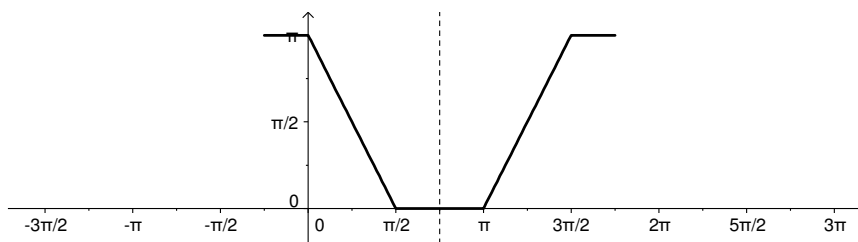
- i. sur  $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$  et  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , on utilise les formules ci-dessus :



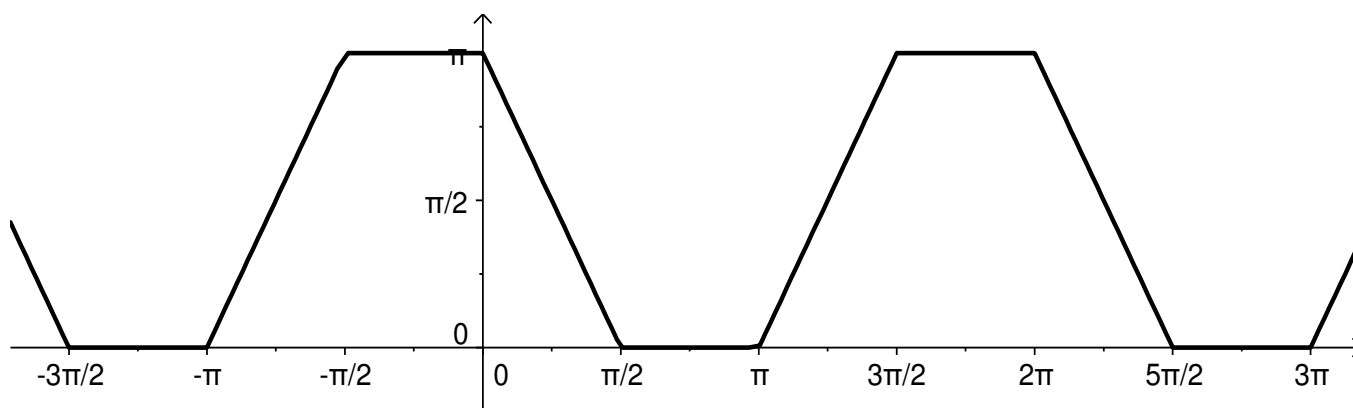
- ii. sur  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ , on fait symétrie de centre  $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  :



- iii. sur  $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} + \pi\right]$ , on fait la symétrie par rapport à l'axe d'équation  $x = \frac{3\pi}{4}$  :



- iv. on complète enfin par  $2\pi$ -périodicité, pour obtenir la courbe  $\mathcal{C}$  :



**Exercice 3**

Remarquons déjà qu'il faut que  $z \neq i$ . Par ailleurs,  $\frac{z+i}{z-i} = 1 \Leftrightarrow z+i = z-i \Leftrightarrow i = -i$ , ce qui est faux donc quel que soit  $z$ ,  $\frac{z+i}{z-i} \neq 1$  et on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^n \left( \frac{z+i}{z-i} \right)^k = \frac{\left( \frac{z+i}{z-i} \right)^{n+1} - 1}{\frac{z+i}{z-i} - 1}.$$

Alors :

$$(E) \Leftrightarrow \left( \frac{z+i}{z-i} \right)^{n+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{z+i}{z-i} \right)^{n+1} = 1.$$

Les solutions de (E) sont donc les complexes  $z$  tels que  $\frac{z+i}{z-i}$  est une racine  $(n+1)^{\text{ème}}$  de l'unité différente de 1.

En posant  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n+1}}$ , on a donc :

$$z \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = \omega^k \text{ avec } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Enfin :

$$\frac{z+i}{z-i} = \omega^k \Leftrightarrow z+i = \omega^k(z-i) \Leftrightarrow z = i \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1}.$$

Les solutions de (E) sont les complexes  $i \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1}$  avec  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Mais,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$i \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1} = i \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} - 1} = i \frac{e^{i\frac{k\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} + e^{-i\frac{k\pi}{n+1}})}{e^{i\frac{k\pi}{n+1}}(e^{i\frac{k\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{k\pi}{n+1}})} = i \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n+1}}{2i \sin \frac{k\pi}{n+1}} = \frac{\cos \frac{k\pi}{n+1}}{\sin \frac{k\pi}{n+1}} = \cotan \frac{k\pi}{n+1}.$$

Les solutions sont donc réelles (donc différentes de  $i$ ) et finalement :

$$\text{Le solutions de (E) sont les réels } \cotan \frac{k\pi}{n+1} \text{ avec } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

**Exercice 4**

1) a. On a :

$$\begin{aligned} z' \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z' = \bar{z}' \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = \overline{\left( \frac{1+z}{1-z} \right)} = \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = (1-z)(1+\bar{z}) \\ &\Leftrightarrow 1+z-\bar{z}-z\bar{z} = 1-z+\bar{z}-z\bar{z} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc,  $z'$  est réel si et seulement si  $z$  l'est, ce qui veut dire que :

L'ensemble des points  $M$  tels que  $z' \in \mathbb{R}$  est l'axe des abscisses privé de  $B$ .

b.  $M'$  appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si  $z'$  est imaginaire pur et :

$$\begin{aligned} z' \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z' = -\bar{z}' \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = -(1-z)(1+\bar{z}) \\ &\Leftrightarrow 1+z-\bar{z}-z\bar{z} = -1+z-\bar{z}+z\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|=1 \end{aligned}$$

Donc,  $M'$  appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si  $|z|=1$ , ce qui veut dire que :

L'ensemble des points  $M$  tels que  $M' \in (Oy)$  est le cercle trigonométrique privé de  $B$ .

c. On a  $\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 \Leftrightarrow 1+z = 1-z \Leftrightarrow z = 0$ . Donc :

Le seul point  $M$  tel que  $\varphi(z) = 1$  est le point  $O$ .

d. On a  $|z'| = \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = 1$  si et seulement si  $|1+z| = |1-z|$ .

Or,  $|1+z| = AM$  et  $|1-z| = BM$  donc  $|z'| = 1$  si et seulement si  $AM = BM$  donc :

L'ensemble des points  $M$  tels que  $|z'| = 1$  est la médiatrice de  $[AB]$ .

2) Pour tout  $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ , on a :

$$|z'| = \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = k \Leftrightarrow |1+z| = k|1-z| \Leftrightarrow AM = kBM \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = k^2 \overline{BM}^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 - k^2 \overline{BM}^2 = 0.$$

Soit :

$$|z'| = k \Leftrightarrow (\overline{AM} + k\overline{BM})(\overline{AM} - k\overline{BM}) = 0.$$

Posons :

$$G = \text{bar} \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & k \end{array} \right) \text{ et } K = \text{bar} \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1 & -k \end{array} \right).$$

Comme  $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ , on a  $1+k \neq 0$  et  $1-k \neq 0$  donc les deux barycentres existent et pour tout point  $M$  du plan, on a  $(1+k)\overline{GM} = \overline{AM} + k\overline{BM}$  et  $(1-k)\overline{KM} = \overline{AM} - k\overline{BM}$ .

Alors, pour tout point  $M$  du plan, on a  $(\overline{AM} + k\overline{BM})(\overline{AM} - k\overline{BM}) = (1-k^2)\overline{GM}.\overline{KM}$  d'où :

$$|z'| = k \Leftrightarrow (1-k^2)\overline{GM}.\overline{KM} = 0 \Leftrightarrow \overline{GM}.\overline{KM} = 0 \text{ (car } 1-k^2 \neq 0).$$

Or,  $\overline{GM}.\overline{KM} = 0$  si et seulement si  $M$  est sur le cercle de diamètre  $[GK]$ .

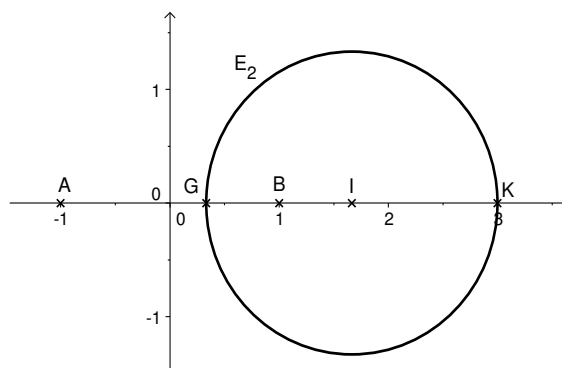
Comme  $M$  doit être différent de  $B$ , il faut voir si  $B$  est sur ce cercle ou pas. Pour cela, posons  $I = \text{mil}[GK]$ . D'après les relations vues ci-dessus, on a  $(1+k)\overline{GI} = \overline{AI} + k\overline{BI}$  et  $(1-k)\overline{KI} = \overline{AI} - k\overline{BI}$ , donc en soustrayant, on obtient  $2k\overline{BI} = (1+k)\overline{GI} - (1-k)\overline{KI}$ . Mais  $\overline{KI} = -\overline{GI}$  donc  $2k\overline{BI} = (1+k)\overline{GI} + (1-k)\overline{GI}$ , soit  $\overline{IB} = \frac{1}{k}\overline{IG}$ .

Ceci implique que  $IB = \frac{1}{k}IG$ . Or,  $B$  est sur le cercle de diamètre  $[GK]$  si et seulement si  $IB = IG$  donc si et seulement si  $\frac{1}{k} = 1$ , ce qui est impossible, car  $k \neq 1$ . Donc, pour  $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ ,  $B$  n'appartient jamais au cercle de diamètre  $[GK]$ .

Finalement :

L'ensemble  $E_k$  des points  $M$  tels que  $|z'| = k$  est le cercle de diamètre  $[GK]$ .

Pour  $k = 2$ , on obtient :  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}$ , d'où le schéma :



Appelons  $C_k$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $k$ . On a  $|z'| = k \Leftrightarrow F(M) = M' \in C_k$ . D'après ce que l'on vient de voir, on a  $|z'| = k \Leftrightarrow M \in E_k$ . Ainsi :

$$F(M) = M' \in C_k \Leftrightarrow M \in E_k.$$

Ceci prouve que :

L'image de  $E_k$  par  $F$  est  $C_k$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $k$ .

3) Pour que  $\varphi \circ \varphi(z) = \varphi(\varphi(z))$  soit défini, il faut que  $\varphi(z)$  et  $\varphi(\varphi(z))$  le soient, c'est-à-dire que  $z \neq 1$  et  $\varphi(z) \neq 1$ . Or, on a vu dans la question 1.c. que  $\varphi(z) = 1$  si et seulement si  $z = 0$ , donc pour que  $\varphi \circ \varphi(z)$  soit défini, il faut que  $z \neq 1$  et  $z \neq 0$ . Ainsi :

$\varphi \circ \varphi$  est définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ .

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ , on a :

$$\varphi \circ \varphi(z) = \varphi(\varphi(z)) = \frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)} = \frac{1 + \frac{1+z}{1-z}}{1 - \frac{1+z}{1-z}} = \frac{\frac{1-z+1+z}{1-z}}{\frac{1-z-1-z}{1-z}} = \frac{2}{-2z}.$$

Donc,  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$  :

$$\varphi \circ \varphi(z) = -\frac{1}{z}$$

4) Pour que  $F^4(M) = F \circ F \circ F \circ F(M)$  soit défini, il faut que  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi(z) = \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(z))))$  soit défini, donc que  $\varphi(z)$ ,  $\varphi(\varphi(z))$ ,  $\varphi(\varphi(\varphi(z)))$  et  $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(z))))$  le soient, c'est-à-dire que  $z \neq 1$ ,  $\varphi(z) \neq 1$  (soit  $z \neq 0$ ),  $\varphi(\varphi(z)) \neq 1$  et  $\varphi(\varphi(\varphi(z))) \neq 1$ . Or :

- $\varphi(\varphi(z)) = 1 \Leftrightarrow \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} = 0 \Leftrightarrow z = -1$  ;
- $\varphi(\varphi(\varphi(z))) = 1 \Leftrightarrow \varphi(\varphi(z)) = 0 \Leftrightarrow \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} = -1 \Leftrightarrow 1+z = -1+z$  ce qui est impossible.

Ainsi, pour que  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi(z)$  soit défini, il faut que  $z$  soit différent de  $-1$ ,  $0$  et  $1$  donc :

$$F^4 = F \circ F \circ F \circ F \text{ est définie sur } P \setminus \{O, A, B\}.$$

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$ , on a :

$$\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi(z) = \varphi \circ \varphi(\varphi \circ \varphi(z)) = \varphi \circ \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{-1/z} = z.$$

Ceci prouve que  $\forall M \in P \setminus \{O, A, B\}$ , on a  $F^4(M) = M$  et ainsi :

$$F^4 = \text{id}_{P \setminus \{O, A, B\}}$$