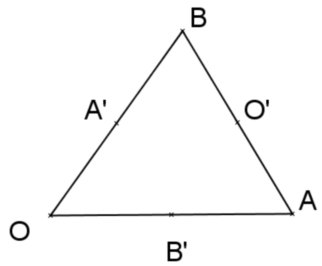
Corrigés des TD du Chapitre 3

Exercice 1



1) Comme O, A, B ne sont pas alignés, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires et $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ est bien un repère cartésien du plan.

Par le théorème des milieux dans le triangle OAB, on a $\overrightarrow{O'A'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{O'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}$ donc $\overrightarrow{O'A'}$ et $\overrightarrow{O'B'}$ ne sont pas colinéaires non plus et $(O',\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'})$ est bien un repère cartésien du plan.

2) Supposons que $M(x,y)$ ait les mêmes coordonnées dans les deux repères.

On a alors :

$$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O'M}=x\overrightarrow{O'A'}+y\overrightarrow{O'B'}.$$

Par soustraction, on a alors :

$$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O'M}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}-x\overrightarrow{O'A'}-y\overrightarrow{O'B'}.$$

Et avec le résultat de la question 1 :

$$\overrightarrow{OO'}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}-x\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}-y\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}=\frac{3}{2}x\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}y\overrightarrow{OB}.$$

Or, $\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, d'où :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{3}{2}x\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}y\overrightarrow{OB}.$$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ étant une base du plan, on obtient $\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}y=\frac{1}{2}$, soit $x=y=\frac{1}{3}$.

Finalement $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$ donc M est le centre de gravité de OAB.

Ainsi :

Il existe un unique point ayant les mêmes coordonnées dans les 2 repères : le centre de gravité de OAB.

Exercice 2

Plaçons-nous dans le repère $(A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG})$. On a alors :

- $B(0,a)$ avec $a > 0$, $E(1,0)$ et une équation de (BE) est $y = -a(x-1)$.
- $C(-a,a)$, $F(1,1)$ et une équation de (CF) est $y = \dfrac{1-a}{1+a}x + \dfrac{2a}{1+a}$.

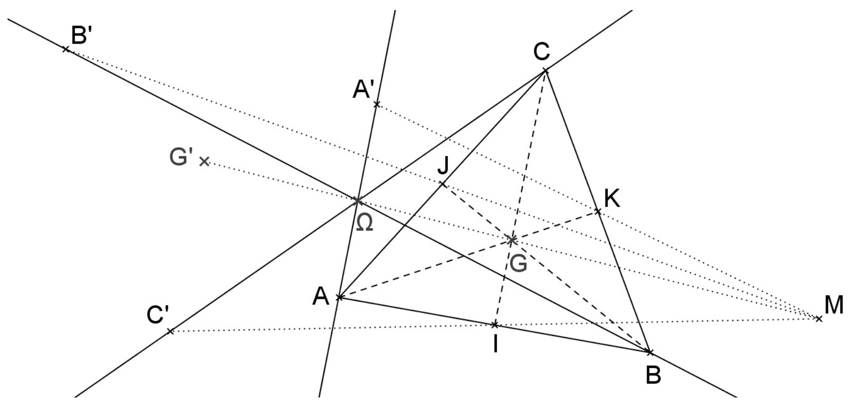
Comme $H = (CF) \cap (BE)$, ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} y = -a(x-1) \\ y = \dfrac{1-a}{1+a}x + \dfrac{2a}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -a(x-1) \\ \left(a + \dfrac{1-a}{1+a}\right)x = a - \dfrac{2a}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a^2+a}{1+a^2} \\ x = \dfrac{a^2-a}{1+a^2} \end{cases}.$$

On a alors $\overrightarrow{DG}\left|\begin{array}{l} a \\ 1 \end{array}\right.$ et $\overrightarrow{DH}\left|\begin{array}{l} a\dfrac{a+a^2}{1+a^2} \\ \dfrac{a+a^2}{1+a^2} \end{array}\right.$ donc $\overrightarrow{DH} = a\overrightarrow{DG}$ et les vecteurs sont colinéaires, donc :

$\boxed{\text{D, G et H sont alignés.}}$

Exercice 3



On pose $I = \text{mil}[AB]$, $J = \text{mil}[AC]$ et $K = \text{mil}[BC]$.

Soit h_1, l'homothétie de centre G et de rapport – ½.

Comme le centre de gravité est aux deux tiers des médianes, on a $\overrightarrow{GI} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GC}$, soit $h_1(C) = I$.

De même, $h_1(B) = J$ et $h_1(A) = K$.

Soit h_2, l'homothétie de centre M et de rapport 2.

Comme $I = \text{mil}[MC']$, on a $\overrightarrow{MC'} = 2\overrightarrow{MI}$, soit $h_2(I) = C'$.

De même, $h_2(J) = B'$ et $h_2(K) = A'$.

On a alors :

$$A \xrightarrow{h_1} K \xrightarrow{h_2} A'$$
$$B \xrightarrow{h_1} J \xrightarrow{h_2} B'$$
$$C \xrightarrow{h_1} I \xrightarrow{h_2} C'$$

Donc $h_2 \circ h_1(A) = A'$, $h_2 \circ h_1(B) = B'$ et $h_2 \circ h_1(C) = C'$.

Or, la composée de deux homothéties est une homothétie de rapport le produit des rapports. Ici, le produit des rapports de h_1 et h_2 vaut – 1 donc $h_2 \circ h_1$ est une symétrie centrale.

De plus, $h_2 \circ h_1(G) = h_2(G) = G'$ tel que $G = \text{mil}[MG']$.

Le centre de la symétrie centrale qui transforme G en G' est Ω, le milieu de $\text{mil}[GG']$

Ainsi, Ω est le milieu de $[AA'],[BB']$ et $[CC']$ et :

$$\boxed{\text{(AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en } \Omega.}$$

Exercice 4

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\overrightarrow{M_{n+2}M_{n+3}} = \frac{-\overrightarrow{M_{n+2}M_n} + \overrightarrow{M_{n+2}M_{n+1}}}{-1+1+2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_nM_{n+1}}.$$

En posant $\vec{u}_k = \overrightarrow{M_{2k}M_{2k+1}}$ et $\vec{v}_k = \overrightarrow{M_{2k+1}M_{2k+2}}$, on a $\vec{u}_{k+1} = \frac{1}{2}\vec{u}_k$ et $\vec{v}_{k+1} = \frac{1}{2}\vec{v}_k$, donc les suites $(\vec{u}_k)$ et $(\vec{v}_k)$ sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}$:

$$\vec{u}_k = \frac{1}{2^k}\vec{u}_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}_k = \frac{1}{2^k}\vec{v}_0.$$

Et, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\vec{u}_k = \sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{M_{2k}M_{2k+1}} = \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_{2n-2}M_{2n-1}} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\vec{v}_k = \sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{M_{2k+1}M_{2k+2}} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \ldots + \overrightarrow{M_{2n-1}M_{2n}} \end{cases}$$

En sommant ces deux égalités :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\vec{u}_k + \sum_{k=0}^{n-1}\vec{v}_k &= \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_{2n-2}M_{2n-1}} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \ldots + \overrightarrow{M_{2n-1}M_{2n}} \\ &= \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_3M_4} + \ldots + \overrightarrow{M_{2n-2}M_{2n-1}} + \overrightarrow{M_{2n-1}M_{2n}} \\ &= \overrightarrow{M_0M_{2n}} \\ &= \overrightarrow{AM_{2n}} \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\vec{u}_k = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\vec{u}_0 = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}\overrightarrow{M_0M_1} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\overrightarrow{AB}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\vec{v}_k = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\vec{v}_0 = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}\overrightarrow{M_1M_2} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\overrightarrow{BC}$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\overrightarrow{AM_{2n}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\overrightarrow{AB} + 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\overrightarrow{BC} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\overrightarrow{AC} = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\overrightarrow{AL}$$

avec $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AC}$.

De plus, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\vec{u}_n = \overrightarrow{M_{2n}M_{2n+1}} = \frac{1}{2^n}\overrightarrow{AB}$ soit :

$$\overrightarrow{AM_{2n+1}} = \overrightarrow{AM_{2n}} + \frac{1}{2^n}\overrightarrow{AB} = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\overrightarrow{AL} + \frac{1}{2^n}\overrightarrow{AB}$$

Et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \overrightarrow{AM_{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \overrightarrow{AM_{2n+1}} = \overrightarrow{AL}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} M_{2n+1} = L$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } (M_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers le point L tel que } \overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AC}.}$$

Exercice 5

Pour montrer que trois points distincts de *H* ne peuvent être alignés, il suffit de prouver que l'intersection de *H* avec une droite *D* contient au maximum deux points.

Comme *H* est la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{x}$, il est clair que si *D* est verticale, $D \cap H$ contient au plus un point. Si *D* n'est pas verticale, elle admet une équation réduite de la forme $y = ax + b$ avec a et b réels.

Déterminer $D \cap H$ revient à résoudre le système $\begin{cases} xy = 1 \\ y = ax + b \end{cases}$ et ce système équivaut à $\begin{cases} xy = 1 \\ ax^2 + bx - 1 = 0 \end{cases}$.

La seconde équation étant du second degré en x, elle admet au plus deux solutions donc $D \cap H$ contient au plus deux points. Ainsi :

$$\boxed{\text{A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

Soit H l'orthocentre de ABC. On a $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$ soit :

$$\begin{aligned}
& (x_H - x_C)(x_B - x_A) + (y_H - y_C)(y_B - y_A) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x_H - x_C)(x_B - x_A) + (y_H - y_C)\left(\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_A}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x_H - x_C)(x_B - x_A) - \frac{1}{x_A x_B}(y_H - y_C)(x_B - x_A) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x_H - x_C) - \frac{1}{x_A x_B}(y_H - y_C) = 0 \qquad\qquad (\text{car } x_B \neq x_A) \\
\Leftrightarrow\quad & y_H = x_A x_B x_H + y_C - x_A x_B x_C
\end{aligned}$$

De même en intervertissant A, B et C, on a $y_H = x_A x_C x_H + y_B - x_A x_B x_C$ et $y_H = x_B x_C x_H + y_A - x_A x_B x_C$.

Alors :

$$y_H + x_A x_B x_C = x_A x_C x_H + y_B = x_A x_B x_H + y_C = x_B x_C x_H + y_A.$$

$x_A x_C x_H + y_B = x_A x_B x_H + y_C$ donne :

$$x_A x_H (x_C - x_B) = \frac{1}{x_C} - \frac{1}{x_B} = \frac{x_B - x_C}{x_B x_C} \quad \Leftrightarrow \quad x_H = -\frac{1}{x_A x_B x_C}.$$

Et, $x_H = -\frac{1}{x_A x_B x_C} \quad \Leftrightarrow \quad x_A x_B x_H = -\frac{1}{x_C} = -y_C$, donc :

$$y_H = x_A x_B x_H + y_C - x_A x_B x_C = -y_C + y_C - x_A x_B x_C = -x_A x_B x_C = \frac{1}{x_H}.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{H \in \mathcal{H}}$$

Exercice 6

Si M = A, on a $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Si M ≠ A, posons $\theta = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$. On a alors :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad AM \times AB \cos\theta = AM \times AB \sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \sin\theta.$$

Or, $\cos\theta = \sin\theta$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$, donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}\ [\pi].$$

En appelant C le point tel que AC = AB et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, on a :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})\ [\pi] \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = 0\ [\pi].$$

Ce qui revient à dire que les points A, C et M sont alignés (qui est vrai si M = A) donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble des points M tels que } \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} \text{ est la droite (AC).}}$$

Exercice 7

Si d est la hauteur de ABC issue de B, on a :

- $B \in d$.
- $d \perp (AC)$ donc $C \in \Delta$, la perpendiculaire à d passant par A.

Si d' est la médiane de ABC issue de B, on a :

- $B \in d'$.
- $I = \text{mil}[AC] \in d'$.

Ainsi, on a déjà $B = d \cap d'$ donc les coordonnées de B sont solution du système (S) : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire : $\underline{B(1,2)}$.

La droite d ayant pour équation $x-y+1=0$, un vecteur normal à d est $\vec{n}(1,-1)$. Ce vecteur est directeur de Δ donc $\det(\vec{n},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}1 & x_C+3\\ -1 & y_C+1\end{vmatrix}=0$, soit $x_C+y_C+4=0$.

Enfin, $I=\text{mil}[AC]\in d'$ donc $2x_I-3y_I+4=0$, or $x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{x_C-3}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{y_C-1}{2}$ donc :

$$2\frac{x_C-3}{2}-3\frac{y_C-1}{2}+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x_C-3y_C+5=0.$$

On a donc le système $\begin{cases}x_C+y_C+4=0\\ 2x_C-3y_C+5=0\end{cases}$ qui donne $\underline{C(-\frac{17}{5},-\frac{3}{5})}$.

Exercice 8

1) Soit I, le milieu de [AB]. Pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ donc :

$$\overrightarrow{MM'}=2(t\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MC}).$$

Alors :

- Si $t=1$, $\overrightarrow{MM'}=2(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MC})=2\overrightarrow{CI}$ et φ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{CI}$.
- Si $t\neq 1$, on peut poser $I(t)=\text{bar}\{(I,t),(C,-1)\}$.
  Alors, pour tout point M du plan, $t\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MC}=(t-1)\overrightarrow{MI(t)}$ et $\overrightarrow{MM'}=2(t-1)\overrightarrow{MI(t)}$.

  Cette relation se transforme en $\overrightarrow{I(t)M'}=(3-2t)\overrightarrow{I(t)M}$ et :
  - Si $3-2t=0$, φ est constante.
  - Si $3-2t\neq 0$, φ est l'homothétie de centre $I(t)$ et de rapport $3-2t$.

2) φ possède un point invariant, $I(t)$, quand $t\neq 1$ tel que $I(t)=\text{bar}\{(I,t),(C,-1)\}$.

On alors $\overrightarrow{II(t)}=\dfrac{1}{1-t}\overrightarrow{IC}$. Et, quand t décrit $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\dfrac{1}{1-t}$ décrit $\mathbb{R}^*$, donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble des points } I(t) \text{ lorsque t varie est } (IC)\setminus\{I\}.}$$

3) Posons $\mathcal{L}=\{M\in\mathcal{P}\,/\,f(M)=0\}$. D'après ce qui précède :

- Si $t=1$, $\overrightarrow{MM'}=2(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MC})=2\overrightarrow{CI}$, $f(M)=\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{MA}$ et $f(M)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CI}.\overrightarrow{MA}=0$ donc :

$$\boxed{\text{Si } t=1,\ \mathcal{L} \text{ est la droite perpendiculaire à (CI) en A.}}$$

- Si $t\neq 1$, $\overrightarrow{MM'}=2(t-1)\overrightarrow{MI(t)}$, $f(M)=\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MA}=2(t-1)\overrightarrow{MI(t)}.\overrightarrow{MA}$ et $f(M)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI(t)}.\overrightarrow{MA}=0$ donc :

$$\boxed{\text{Si } t\neq 1,\ \mathcal{L} \text{ est le cercle de diamètre [AI(t)].}}$$

Exercice 9

a. On a, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$ donc $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \Leftrightarrow \rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$.

Cette équation est de la forme $\rho = \dfrac{k}{\cos(\theta - \theta_o)}$, donc c'est l'équation d'une droite passant par $A(1,0)$ (avec $\theta = 0$) et $B(0,1)$ (avec $\theta = \frac{\pi}{2}$).

On peut aussi écrire $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \Leftrightarrow \rho\cos\theta + \rho\sin\theta = 1 \Leftrightarrow x + y = 1$ donc on retrouve une droite d'équation cartésienne $x + y = 1$.

b. Pour $\rho \neq 0$, on a :

$$\rho = 2\cos\theta - 3\sin\theta \Leftrightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\theta - 3\rho\sin\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4}.$$

Donc, on a affaire à un cercle de centre $(1, -\frac{3}{2})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

c. $\rho = \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})$ donc, on a affaire à un cercle de diamètre 1 passant par l'origine et de centre Ω tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{O\Omega}) = \dfrac{2\pi}{3}$ et $O\Omega = \dfrac{1}{2}$.

d. Remarquons que $\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta} = 0$ entraine $1 + \sin 2\theta = 1 - \sin 2\theta = 0$ ce qui est impossible. De plus, pour tout θ, $-1 \leq \sin 2\theta \leq 1$ donc $\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta} = 0$ est bien défini. On a :

$$\begin{aligned}
\rho = \frac{1}{\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta}} &\Leftrightarrow \rho^2\left(\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta}\right)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow 2\rho^2\left(1 + \sqrt{1-\sin^2 2\theta}\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow 2\rho^2\left(1 + |\cos 2\theta|\right) = 1
\end{aligned}$$

Alors, pour θ décrivant $[0, 2\pi[$:

- Si $\cos 2\theta \geq 0$, soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$, on a $1 + |\cos 2\theta| = 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ donc :

$$2\rho^2\left(1 + |\cos 2\theta|\right) = 1 \Leftrightarrow (\rho\cos\theta)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}.$$

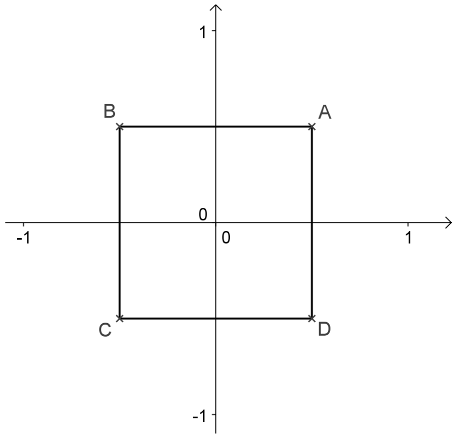
- Si $\cos 2\theta \leq 0$, soit $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, on a $1 + |\cos 2\theta| = 1 - \cos 2\theta = 2\sin^2\theta$ donc :

$$2\rho^2\left(1 + |\cos 2\theta|\right) = 1 \Leftrightarrow (\rho\sin\theta)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4}.$$

Or :

- si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$, $x > 0$ donc $x = \frac{1}{2}$ et si $\theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$, $x < 0$ donc $x = -\frac{1}{2}$;
- si $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, $y > 0$ donc $y = \frac{1}{2}$ et si $\theta \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, $y < 0$ donc $y = -\frac{1}{2}$.

Finalement, on obtient des segments de droite qui forment un carré ABCD comme sur la figure suivante :



Exercice 10

1) Une équation polaire du cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1 est :

$$\underline{r = 1}.$$

Soit $M_o(\cos\alpha, \sin\alpha)$ un point du cercle trigonométrique. La tangente au cercle en M_o est la droite perpendiculaire à (OM_o) passant par M_o, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\overrightarrow{OM_o}.\overrightarrow{M_oM} = 0$.

Une équation cartésienne de cette tangente est donc $\cos\alpha(x - \cos\alpha) + \sin\alpha(y - \sin\alpha) = 0$ soit :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient $r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha = r\cos(\theta - \alpha) = 1$, soit :

$$\underline{r = \frac{1}{\cos(\theta - \alpha)}}.$$

2) Une équation cartésienne de *C* est $(x-1)^2 + y^2 = 1$, soit $x^2 + y^2 - 2x = 0$. En passant en polaires, on obtient :

$$\underline{r = 2\cos\theta \text{ ou } r = 0}.$$

La tangente en O à *C* est l'axe des ordonnées, d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$ ou $r = 0$.

Pour un point M_o de *C*, différent de O, de coordonnées polaires $(\alpha, 2\cos\alpha)$ (donc de coordonnées cartésiennes $(2\cos^2\alpha, 2\cos\alpha\sin\alpha) = (1 + \cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$), la tangente au cercle en M_o est la droite perpendiculaire à (ΩM_o) passant par M_o, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\overrightarrow{\Omega M_o}.\overrightarrow{M_oM} = 0$.

Une équation cartésienne de cette tangente est donc :

$$\cos 2\alpha(x - 1 - \cos 2\alpha) + \sin 2\alpha(y - \sin 2\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha = 1 + \cos 2\alpha.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient :

$$\underline{r = \frac{1+\cos 2\alpha}{\cos(\theta - 2\alpha)}}.$$

3) La pente de d est 1 donc d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et les tangentes recherchées ne passent pas par O, ni par le point A, diamétralement opposé à O de coordonnées cartésiennes $(2,0)$.

Soit M_o, différent de O et A, un point de *C*, de coordonnées polaires $(\alpha, 2\cos\alpha)$. Or, $2\cos\alpha = OM_o > 0$ donc on peut prendre α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ exclus (car M_o n'est pas sur (Oy)) et $\alpha \neq 0$ (car M_o n'est pas sur (Ox)).

On a vu plus haut que la tangente à *C* en M_o a pour équation cartésienne $x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha = \cos^2\alpha$ et donc pour pente $-\text{cotan}(2\alpha)$ (qui est définie car $2\alpha \neq 0\ [\pi]$).

Pour que cette tangente soit parallèle à d, il faut et il suffit que $\text{cotan}(2\alpha) = -1$, soit $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ ou $-\frac{\pi}{8}$.

On a $\cos\frac{3\pi}{8} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}) = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $2\cos(-\frac{\pi}{8}) = 2\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

Donc :

$$\boxed{\text{Les tangentes à } C \text{ parallèles à d sont les tangentes aux points de coordonnées polaires } (\tfrac{3\pi}{8}, \sqrt{2-\sqrt{2}}) \text{ et } (-\tfrac{\pi}{8}, \sqrt{2+\sqrt{2}}).}$$

Exercice 11

L'application f est une isométrie si et seulement si $\forall \vec{u} \in \vec{P}$, $\| f(\vec{u}) \| = \| \vec{u} \|$, soit :

$$\begin{aligned} \| \vec{u} + \alpha(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega} \| = \| \vec{u} \| \quad &\Leftrightarrow \quad \| \vec{u} + \alpha(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \| \vec{u} \|^2 + 2\vec{u}.\big(\alpha(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega}\big) + \| \alpha(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\alpha(\vec{\omega}.\vec{u})^2 + \alpha^2(\vec{\omega}.\vec{u})^2 \| \vec{\omega} \|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha(2 + \alpha \| \vec{\omega} \|^2)(\vec{\omega}.\vec{u})^2 = 0 \end{aligned}$$

Ceci doit être vrai $\forall \vec{u} \in \vec{P}$, or α et $\vec{\omega}$ ne sont pas nuls donc :

$$\boxed{\text{f est une isométrie} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{2}{\| \vec{\omega} \|^2}}.$$

Posons alors $f(\vec{u}) = \vec{u} - \frac{2}{\| \vec{\omega} \|^2}(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega} = \vec{u} - 2(\frac{\vec{\omega}}{\| \vec{\omega} \|}.\vec{u})\frac{\vec{\omega}}{\| \vec{\omega} \|} = \vec{u} - 2(\vec{i}.\vec{u})\vec{i}$ avec $\vec{i} = \frac{\vec{\omega}}{\| \vec{\omega} \|}$.

Remarquons que $f(\vec{i}) = -\vec{i}$ et si $\vec{j}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{j}$, $f(\vec{j}) = \vec{j}$.

De plus, si on se place dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{P}$, on a $\forall \vec{u}(x,y) \in \vec{P}$, $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et :

$$f(\vec{u}) = x\vec{i} + y\vec{j} - 2x\vec{i} = -x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectoriel orthogonale à } \vec{\omega}.}$$

Exercice 12

$\forall\, \mathrm{M} \in P$, on a :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}).(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}).(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}).(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})$$
$$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$$
$$=3MG^2+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$$

car $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

On a :

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}.(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA})+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$$
$$=\overrightarrow{GC}.(-\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CA}).(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB})$$
$$=-GC^2+GC^2+\overrightarrow{GC}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$$
$$=\overrightarrow{GC}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$$

Et $\overrightarrow{GC}=-\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ donc :

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{3}(AC^2+BC^2-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})$$

Enfin, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}(AC^2+BC^2-AB^2)$ donc :

$$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=-\frac{AB^2+BC^2+AC^2}{6}.$$

Ainsi, $\forall\, \mathrm{M}\in P$, $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=3MG^2-\dfrac{AB^2+BC^2+AC^2}{6}$ et donc :

$$M\in L \quad\Leftrightarrow\quad GM=\frac{\sqrt{2(AB^2+BC^2+AC^2)}}{6}.$$

Et :

$$\boxed{L \text{ est le cercle de centre G et de rayon } \frac{\sqrt{2(AB^2+BC^2+AC^2)}}{6}.}$$

Exercice 13

1) On a :

$$x^2+y^2-4mx-2my+10(m-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2m)^2+(y-m)^2=5m^2-10(m-1)$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-2m)^2+(y-m)^2=5(m-1)^2+5$$

Comme $\forall\, m\in\mathbb{R},\ 5(m+1)^2+5>0$:

$$\boxed{\forall\, m\in\mathbb{R},\ C_m \text{ est un cercle de centre } \Omega_m(2m,m) \text{ et de rayon } \sqrt{5(m+1)^2+5}.}$$

On a de plus, $\forall\, m\in\mathbb{R}$, $x_{\Omega_m}=2m=2y_{\Omega_m}$ donc :

$$\boxed{\text{Quand m décrit } \mathbb{R},\ \Omega_m \text{ décrit la droite } D \text{ d'équation } x-2y=0.}$$

2) Soient m un réel non nul.

Les coordonnées (x,y) des éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_0$ sont solutions de :

$$\begin{cases} x^2+y^2-4mx-2my+10(m-1)=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4mx+2my=10m \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-2x \\ x^2+(5-2x)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-2x \\ x^2-4x+3=0 \end{cases}$$

Et les racines de x^2-4x+3 sont 1 et 3 donc, $\forall\, m\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4mx-2my+10(m-1)=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \quad (x,y)=(1,3) \text{ ou } (3,-1)$$

Donc, $\forall\, m\in\mathbb{R}^*$, $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_0$ se coupent en $A(1,3)$ et $B(3,-1)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Tous les cercles } \mathcal{C}_m \text{ ont deux points en commun : } A(1,3) \text{ et } B(3,-1).}$$

3) Remarquons déjà que comme un cercle et une droite ont au plus deux points d'intersection et que A et B sont sur tous les cercles $\mathcal{C}_m$, on a :

- Si $M_o=A$ ou $M_o=B$, M_o appartient à tous les cercles $\mathcal{C}_m$.
- Si $M_o\in(AB)\setminus\{A,B\}$, M_o n'appartient à aucun cercle $\mathcal{C}_m$.

Si maintenant $M_o\notin(AB)$, M_o appartient à un cercle $\mathcal{C}_m$ si et seulement s'il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que

$$x_o^2+y_o^2-4mx_o-2my_o+10(m-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (4x_o+2y_o-10)m=x_o^2+y_o^2-10.$$

Or, on a $M_o\notin(AB)$ donc $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM_o})\neq 0$, soit $2(y_o-3)+4(x_o-1)=4x_o+2y_o-10\neq 0$ et ainsi, on peut écrire :

$$\exists\, m\in\mathbb{R}\setminus M_o\in\mathcal{C}_m \quad\Leftrightarrow\quad m=\frac{x_o^2+y_o^2-10}{4x_o+2y_o-10}.$$

Donc :

$$\boxed{\forall\, M_o\in\mathcal{P}\setminus(AB), \text{ il existe un unique cercle } \mathcal{C}_m \text{ contenant } M_o \text{ avec } m=\frac{x_o^2+y_o^2-10}{4x_o+2y_o-10}.}$$

Exercice 14

1) Supposons que C soit le centre d'un cercle de rayon R > 0 tangent extérieurement à $\mathcal{C}_A$ en A' et $\mathcal{C}_B$ en B'.

On a alors $AC=AA'+A'C=1+R$ et $BC=BB'+B'C=2+R$.

La première relation implique que $AC>1$ et la soustraction des deux donne $BC-AC=1$.

Réciproquement :

Soit C un point tel que $AC>1$ et $BC-AC=1$.

Posons $R=AC-1>0$ et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre C et de rayon R. On a alors :

- $AC=R+1$ donc $\mathcal{C}$ est tangent extérieurement à $\mathcal{C}_A$;
- $BC=AC+1=R+2$ donc $\mathcal{C}$ est tangent extérieurement à $\mathcal{C}_B$.

Ainsi, $\mathcal{C}$ est tangent extérieurement à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$.

2) D'après ce qui précède, un cercle est tangent extérieurement à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ si et seulement son centre C vérifie $BC - AC = 1$ avec $AC > 1$, son rayon valant alors $R = AC - 1$.

Donc, les cercles tangents extérieurement à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ sont les cercles de centre $C \in \mathcal{L} \cap \mathcal{L}'$ et de rayon $R = AC - 1$ avec $\mathcal{L} = \{M \in \mathcal{P},\ BM - AM = 1\}$ et $\mathcal{L}' = \{M \in \mathcal{P},\ AM > 1\}$.

L'ensemble $\mathcal{L}'$ est l'extérieur strict du cercle $\mathcal{C}_A$. Reste à déterminer $\mathcal{L}$.

Plaçons-nous dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $A(0,1)$ et $B(0,-2)$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
M(x,y) \in \mathcal{L} \quad &\Leftrightarrow \quad BM = AM + 1 \quad \Leftrightarrow \quad BM^2 = (AM+1)^2 = AM^2 + 2AM + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + (y+2)^2 = x^2 + (y-1)^2 + 2AM + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad AM = 3y + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq -\dfrac{1}{3} \\ AM^2 = (3y+1)^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq -\dfrac{1}{3} \\ x^2 + (y-1)^2 = (3y+1)^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq -\dfrac{1}{3} \\ x^2 = 8(y^2 + y) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Or, $8(y^2 + y) = 8(y + \frac{1}{2})^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ ou $y \leq -1$, donc :

$$M(x,y) \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 = 8(y^2 + y) \end{cases}.$$

On verra plus tard que la courbe d'équation $x^2 = 8(y^2 + y)$ est une hyperbole. En attendant, on a :

$$M(x,y) \in \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ 8y^2 + 8y - x^2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ (2y+1)^2 = \dfrac{x^2+2}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x^2+2}{2}} - 1\right).$$

Donc $\mathcal{L}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x^2+2}{2}} - 1\right)$.

Remarquons alors que, si $M(x,y) \in \mathcal{L}$:

$$AM > 1 \quad \Leftrightarrow \quad AM^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8(y^2+y) + (y-1)^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 9y^2 + 6y > 0.$$

Or, avec $y \geq 0$, on a $9y^2 + 6y \geq 0$ avec $9y^2 + 6y = 0$ si et seulement si $y = 0$.

Donc $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{O\}$ et finalement :

Les cercles tangents extérieurement à $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ sont les cercles de centre $C \in \mathcal{L} \setminus \{O\}$ et de rayon $AC - 1$ où $\mathcal{L}$ est la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x^2+2}{2}} - 1\right)$.

On a la figure :