DS de Mathématiques n° 1

3 heures

Calculatrices interdites

Exercice 1

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \text{th}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) & \text{si } x \neq -1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.
3) Dresser le tableau de variations complet de f (variations, limites).
4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Soit x_o la solution de cette équation. Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_o.
5) Démontrer que $\mathscr{C}$ admet des demi-tangentes à droite et à gauche au point d'abscisse $x = -1$, dont on donnera des équations. *On admettra que si* f' *admet des limites à droite et à gauche au point considéré, alors sa courbe admet des demi-tangentes en ce point.*
6) Construire la courbe $\mathscr{C}$, ses éventuelles asymptotes ainsi que la tangente de la question 4 et les demi-tangentes de la question 5.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arccos(\sin x) + \arcsin(\cos x)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ? Justifier.
2) Quelle est la période de f ? Justifier.
3) Prouver que $\forall\, t \in [-1\,;1]$, $\arccos(t) + \arcsin(t) = \dfrac{\pi}{2}$.
4) Montrer que $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \pi - f(x)$ et en déduire que $\mathscr{C}$ possède un centre de symétrie que l'on précisera.
5) Evaluer $f\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$ et en déduire que la droite d'équation $x = \dfrac{3\pi}{4}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
6) En déduire un intervalle très simple sur lequel il suffira d'étudier f. Donner une expression simple de f sur cet intervalle.
7) Construire alors la courbe $\mathscr{C}$ en justifiant les étapes de construction.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^k = 0 .$$

On prouvera que toutes les solutions sont réelles.

Exercice 4

Le plan complexe *P* étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit φ l'application de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(z) = z' = \frac{1+z}{1-z} .$$

On note A et B les points de *P* d'affixes respectives – 1 et 1. Enfin, on appelle F l'application de $P \setminus \{B\}$ dans *P* qui à tout point M d'affixe z de $P \setminus \{B\}$ associe le point M', d'affixe z'.

1) Déterminer :
   a. l'ensemble des points M tels que z' soit réel ;
   b. l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des ordonnées ;
   c. l'ensemble des points M tels que $\varphi(z) = 1$;
   d. l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.
2) Soit $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Déterminer géométriquement l'ensemble E_k des points M tels que $|z'| = k$. Construire E_2. Quel est l'image de E_k par F ?
3) Déterminer l'ensemble de définition de $\varphi \circ \varphi$ et, pour tout complexe z de cet ensemble, déterminer une expression simple de son image par $\varphi \circ \varphi$.
4) On pose $F^4 = F \circ F \circ F \circ F$. Déterminer *avec soin* l'ensemble de définition de F^4, puis déterminer F^4.