# *TD du Chapitre 3 : Géométrie plane*

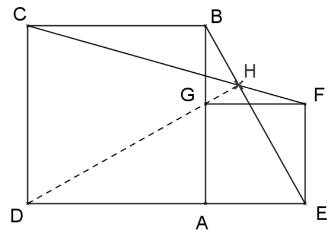
### *Exercice 1*

Soient O, A, B trois points non alignés du plan et O', A', B' les milieux respectifs de [AB], [OB], [OA].

1) Justifier que $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(O', \overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$ sont des repères cartésiens du plan.
2) Existe-t-il des points qui ont les mêmes coordonnées dans les deux repères ?

### *Exercice 2*

Soient ABCD et AEFG deux carrés tels que sur la figure ci-dessous.




Montrer que D, G et $H = (CF) \cap (BE)$ sont alignés.

### *Exercice 3*

Soit ABC un triangle de centre de gravité G et M un point quelconque du plan. On appelle A', B' et C' les symétriques de A, B et C par rapport au milieu de [BC], [AC] et [AB] respectivement. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

☺ *On pourra introduire deux homothéties bien choisies et leur composée.*

### *Exercice 4*

Soient A, B et C trois points du plan. On définit la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$M_0 = A,\ M_1 = B,\ M_2 = C \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ M_{n+3} = \mathrm{bar}\{(M_n, -1), (M_{n+1}, 1), (M_{n+2}, 2)\}.$$

Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point L, que l'on déterminera.

☺ *On pourra poser* $\vec{u}_k = \overrightarrow{M_{2k}M_{2k+1}}$ *et* $\vec{v}_k = \overrightarrow{M_{2k+1}M_{2k+2}}$.

### *Exercice 5*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient A, B et C trois points de l'hyperbole *H* d'équation $xy = 1$. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et que l'orthocentre de ABC est encore sur *H*.

**_Exercice 6_**

Soient A et B deux points du plan. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$.

**_Exercice 7_**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, soient $A(-3,-1)$, $d: x-y+1=0$ et $d': 2x-3y+4=0$.

Déterminer B et C tels que d et $d'$ soient respectivement la hauteur et la médiane issue de B dans ABC.

**_Exercice 8_**

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et t un réel. On considère l'application :

$$\varphi: P \to P\,;\, M \mapsto M' \text{ avec } \overrightarrow{MM'} = t\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}.$$

1) Déterminer la nature de $\varphi$ suivant la valeur de t.
2) Lorsque $\varphi$ possède un point invariant, noté $I(t)$, déterminer l'ensemble des points $I(t)$ lorsque t varie.
3) On pose $f: P \to \mathbb{R}\,;\, M \mapsto \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MA}$ avec $M' = \varphi(M)$. Déterminer la ligne de niveau f(M) = 0.

**_Exercice 9_**

Reconnaitre et construire les courbes d'équation :

a. $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$

b. $\rho = 2\cos\theta - 3\sin\theta$

c. $\rho = \sin(\theta - \dfrac{\pi}{6})$

d. $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta}}$.

**_Exercice 10_**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Donner une équation polaire du cercle trigonométrique et de sa tangente en un point.
2) Même question avec le cercle $C$ de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1.
3) Déterminer les tangentes à $C$ parallèles à $d: x-2y+1=0$.

**_Exercice 11_**

Soit $\vec{\omega}$ un vecteur non nul fixé du plan, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $f: \vec{P} \to \vec{P}\,;\, \vec{u} \mapsto \vec{u} + \alpha(\vec{\omega}.\vec{u})\vec{\omega}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\vec{\omega}$ et $\alpha$ pour que f soit une isométrie. Dans ce cas, donner la nature exacte de f.

☺ *Il s'agit ici d'une isométrie vectorielle, c'est-à-dire une application qui conserve la norme.*

**Exercice 12**

Soit ABC un triangle du plan de centre de gravité G.

Déterminer et construire le lieu $L=\left\{\mathrm{M}\in P\,/\,\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0\right\}$.

**Exercice 13**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}})$, soit la courbe $C_{\mathrm{m}}$ d'équation :

$$\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-4\mathrm{mx}-2\mathrm{my}+10(\mathrm{m}-1)=0$$

où m est un paramètre réel.

1) Montrer que $\forall\,\mathrm{m}\in\mathbb{R}$, $C_{\mathrm{m}}$ est un cercle de centre $\Omega_{\mathrm{m}}$ et déterminer le lieu des $\Omega_{\mathrm{m}}$ quand m décrit $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que tous les cercles $C_{\mathrm{m}}$ ont deux points en commun A et B dont on donnera les coordonnées.
3) Prouver que pour tout point $\mathrm{M_o}(\mathrm{x_o},\mathrm{y_o})$ n'appartenant pas à (AB), il existe un unique cercle $C_{\mathrm{m}}$ contenant $\mathrm{M_o}$. Que dire si $\mathrm{M_o}\in(\mathrm{AB})$ ?

**Exercice 14**

Soient A et B deux points distincts du plan, $C_{\mathrm{A}}$ et $C_{\mathrm{B}}$ les cercles tangents extérieurement de centres respectifs A et B et de rayons 1 et 2.

1) Montrer qu'un cercle de centre C est tangent extérieurement à $C_{\mathrm{A}}$ et $C_{\mathrm{B}}$ si et seulement si $\mathrm{BC}-\mathrm{AC}=1$ et $\mathrm{AC}>1$.
2) Déterminer tous les cercles tangents extérieurement à $C_{\mathrm{A}}$ et $C_{\mathrm{B}}$.