TD du Chapitre 4 : Equations différentielles

Exercice 1

Résoudre :

a) $y'+2y=t$.

b) $y'+e^t y=e^t$ avec $y(0)=0$.

c) $(1+t^2)y'+2ty=t^2$.

d) $y'+y=\sin t+3\sin(2t)$.

e) $(\operatorname{ch} t)\, y'+(\operatorname{sh} t)\, y=\dfrac{1}{1+t^2}$.

f) $(1+t^2)y'-\arctan(t)y=0$.

g) $(1+e^t)y'+(1-e^t)y=2+e^t$ avec $y(0)=2$.

h) $ty'+y=2t$.

i) $y''+y=4t^2e^t$.

j) $y''+2y'+2y=e^{-t}\cos t$.

k) $y''-4y'+3y=te^t+\cos t$ avec $y(0)=y'(0)=0$.

l) $y''-y=2\cos^2 t$.

Exercice 2

Résoudre :

a) $y'=e^{y+t}$.

b) $t^2y''+ty'-9y=6t^3$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $t=e^u$.

c) $ty''-y'-t^3y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z(t)=y(\sqrt{t})$.

d) $\begin{cases} x'(t)=5x(t)-2y(t) \\ y'(t)=-x(t)+6y(t) \end{cases}$ en posant $z(t)=ax(t)+by(t)$ avec a et b réels judicieusement choisis.

e) $y'''-y=0$.

Exercice 3

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (E) : $y'+y=g$ où g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Exercice 4

Soit l'équation (E) : $(y')^2=yy''$.

Montrer que si une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ n'est pas la fonction nulle alors elle ne s'annule jamais, puis déterminer les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$

☺ *On pourra considérer un intervalle ouvert le plus grand possible sur lequel une solution* y *ne s'annule pas et considérer* $g=\dfrac{y'}{y}$.

Exercice 5

Trouver toutes les fonctions f et g continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\int_0^x f(t)dt=x+g(x)$ et $\int_0^x g(t)dt=x+f(x)-1$.

Exercice 6

Résoudre $y'(x) = y(1-x)$.

Exercice 7

Soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ le graphe de f dans un repère orthonormé du plan et M, le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x. On appelle normale à $\mathcal{C}$ en M la droite passant par M et perpendiculaire à la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Enfin, on note N le point d'intersection de cette normale avec (Ox).

Déterminer f pour que le milieu de [MN] décrive la parabole d'équation $y^2 = x$.

Exercice 8

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dérivables en 0 et telles que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $\forall\, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

Exercice 9

Soit l'équation (E) : $y' + ay = b$ où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I et $x_o \in I$.
Montrer que les tangentes au point d'abscisse x_o aux courbes représentatives des solutions de (E) sont toutes concourantes ou toutes parallèles.

Exercice 10

Le Docteur Temperance « Bones » Brennan et l'agent Seeley Booth viennent d'être appelés sur une nouvelle et mystérieuse affaire. Un squelette a été retrouvé dans un champ et, apparemment, le corps est « tombé du ciel ». Après un examen sommaire, Brennan annonce à Booth que la vitesse du corps au moment de l'impact était de 200 km/h. L'agent du FBI est surpris. Comment Brennan a-t-elle pu conclure cela rien qu'en regardant les ossements ? Devant l'étonnement de son équipier, Bones lui explique que la vitesse maximale d'un corps d'environ 75 kg en chute libre sans vitesse initiale est de l'ordre de 200 km/h.

Lors d'une chute, un corps est soumis à la pesanteur mais aussi à la résistance de l'air. L'équation du mouvement est donnée par la relation fondamentale de la dynamique, $ma(t) = mg - F(t)$ où $a(t) = v'(t)$ est l'accélération, soit la dérivée de la vitesse v(t) à l'instant t, exprimée en m/s, m est la masse du corps et $g = 10$ m/s² est la constante de la gravitation. Il y a deux modèles pour la force de résistance de l'air F :

Premier modèle : $F(t) = k\,v(t)$ où $k = 10$ kg/s est une constante de frottement.

Second modèle : $F(t) = K\,v(t)^2$ où $K = 0{,}25$ kg/m est une constante de frottement.

Que pensez-vous de l'assertion de Brennan ? Quel modèle utilise-t-elle ?