

Chapitre 5 : Exemples d'étude de courbes paramétrées

Exemple 1

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+1}{t^2+t+1} \\ y(t) = \frac{t^2+2t}{t^2+t+1} \end{cases}$$

Le discriminant de t^2+t+1 étant négatif, ce trinôme ne s'annule pas sur \mathbb{R} donc les fonctions x et y sont définies et dérivables (car rationnelles) sur \mathbb{R} et :

$$x'(t) = \frac{t^2-1}{(t^2+t+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{3-(t-1)^2}{(t^2+t+1)^2}$$

On a le tableau :

t	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{3}$	1	$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
$x'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	1	2	$\frac{5-2\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5+2\sqrt{3}}{6+3\sqrt{3}}$	1
y	1	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$y'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Tangentes particulières :

- En $t = \pm 1$, il y a des tangentes verticales et en $t = 1 \pm \sqrt{3}$, il y a des tangentes horizontales.

Pseudo branches infinies :

- Quand $t \rightarrow \pm \infty$, on a $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} y(t) = 1$ donc la courbe tend vers le point $A(1,1)$.

Attention : La courbe n'est pas fermée !

- Pour $t \neq \pm 1$, un vecteur tangent est $\vec{i} + \left(\frac{3}{t^2-1} - 1 \right) \vec{j}$ qui tend vers $\vec{i} - \vec{j}$ quand $t \rightarrow \pm \infty$.

On obtient la courbe \mathcal{C}_1 .

Exemple 2

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

On a :

- $\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$ donc on peut étudier sur $[-\pi; \pi]$.
- $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc il y a une symétrie par rapport à (Ox) et on peut étudier sur $[0; \pi]$.
- $\begin{cases} x(\pi-t) = -x(t) \\ y(\pi-t) = y(t) \end{cases}$ donc il y a une symétrie par rapport à (Oy) et on peut étudier sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = y(t) \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = x(t) \end{cases}$ donc il y a une symétrie par rapport à $y = x$ et on peut étudier sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

On a :

$$x'(t) = -3 \sin t \cos^2 t \quad \text{et} \quad y'(t) = 3 \cos t \sin^2 t.$$

On a le tableau :

t	0	$\frac{\pi}{4}$
x'(t)	-	
x	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
y'(t)	+	

Tangente particulière : remarquons qu'un vecteur tangent est $-\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$

- En $t = 0$, il y a une tangente horizontale.
- En $t = \frac{\pi}{4}$, il y a une tangente dirigée par $-\vec{i} + \vec{j}$.

On obtient la courbe \mathcal{C}_2 (complétée par symétries).

Exemple 3

$$\begin{cases} x(t) = \pi + \arctan t \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

On a $\begin{cases} x(-t) = \pi - \arctan t = 2\pi - x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ donc il y a une symétrie par rapport à $x = \pi$ et on peut étudier sur \mathbb{R}_+ .

On a :

$$x'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = 2t.$$

On a le tableau :

t	0	$+\infty$
x'(t)		+
x	π	$\frac{3\pi}{2}$
y	1	$+\infty$
y'(t)		+

Tangente particulière :

- En $t = 0$, il y a une tangente horizontale.

Branche infinie :

- Quand $t \rightarrow +\infty$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{3\pi}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$ donc il y a une asymptote verticale $x = \frac{3\pi}{2}$.

On obtient la courbe \mathcal{C}_3 (complétée par symétrie).

Exemple 4

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^4} \\ y(t) = 2t + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur \mathbb{R}^* et :

$$x'(t) = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = 2\frac{t^3-1}{t^3}.$$

On a le tableau :

t	$-\infty$	$-\sqrt[4]{1/3}$	0	$\sqrt[4]{1/3}$	1	$+\infty$
x'(t)		-	0	+	0	-
x	0	$-\frac{\sqrt[4]{27}}{4}$	0	$\frac{\sqrt[4]{27}}{4}$	0,5	0
y	$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$
y'(t)		+		-	-	0

Tangentes particulières :

- En $t = \pm \sqrt[4]{1/3}$, il y a des tangentes verticales et en $t = 1$, il y a une tangente horizontale.

Branches infinies :

- Quand $t \rightarrow 0$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = +\infty$ donc (Oy) est asymptote verticale ;
- Quand $t \rightarrow \pm\infty$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$ donc (Oy) est encore asymptote verticale.

On obtient la courbe \mathcal{C}_4 .

Courbes

