Chapitre 6 : Preuves des compléments sur les ellipses

Image d'un cercle par une affinité orthogonale

Propriété :

L'image d'un cercle par une affinité orthogonal de rapport différent de 1 et – 1 est une ellipse.

Preuve :

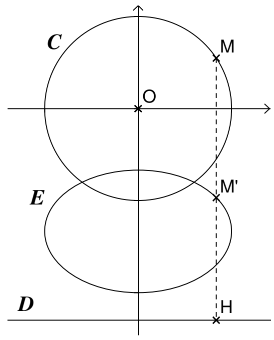
Soient *C* un cercle de centre O et de rayon R et f une affinité orthogonale d'axe *D*.

On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, tel que l'axe (Ox) soit la parallèle à *D* en O.

Une équation de *C* dans ce repère est alors $x^2+y^2=R^2$ et une équation de *D* est $y=\lambda$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan, $H(x,\lambda)$ son projeté orthogonal sur *D* et M' son image par f.

On a alors $\overrightarrow{HM'}=k\overrightarrow{HM}$ donc $M'(x,y')$ avec $y'=k(y-\lambda)+\lambda$.



Alors $y=\dfrac{y'+(k-1)\lambda}{k}$ et :

$$M\in C \iff x^2+y^2=R^2 \iff x^2+\frac{(y'+(k-1)\lambda)^2}{k^2}=R^2 \iff \frac{x^2}{R^2}+\frac{(y'+(k-1)\lambda)^2}{k^2R^2}=1.$$

Or, $\dfrac{x^2}{R^2}+\dfrac{(y'+(k-1)\lambda)^2}{k^2R^2}=1$ est une équation de l'ellipse *E* de centre $\left(0,(1-k)\lambda\right)$. Ainsi :

$$M\in C \iff M'\in E.$$

Et donc, l'image de *C* par f est *E*.

Remarque : le grand axe dépend de la position de k² par rapport à 1.

Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan

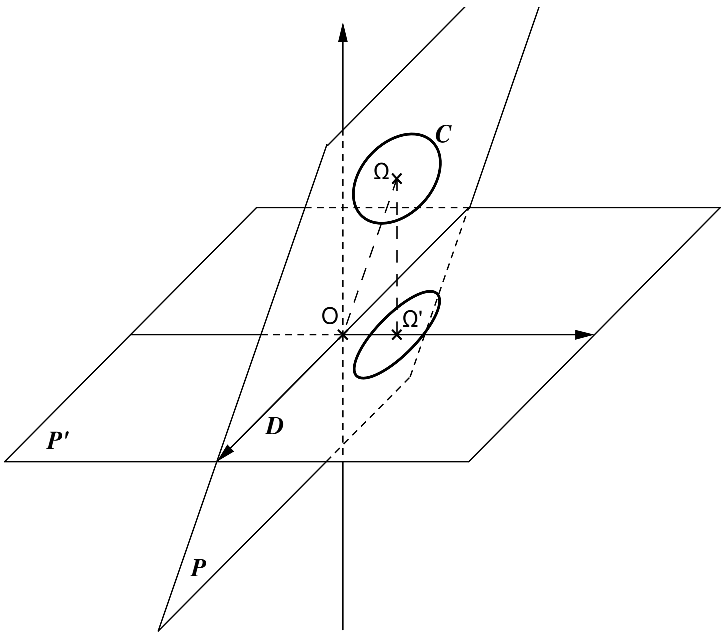
Propriété :

> Soient *P* et *P*' deux plans non parallèles et non perpendiculaires de l'espace et *C* un cercle inclus dans *P*.
> La projection orthogonale de *C* sur *P*' est une ellipse.

Preuve :

Comme *P* et *P*' ne sont pas parallèles, ils sont sécants en une droite *D*.

Appelons Ω le centre de *C*, R son rayon, O le projeté orthogonal de Ω sur *D* et plaçons-nous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que (xOy) = *P*' avec (Ox) = *D* et (Oy) ⊥ *D*.



Une équation de *P* dans ce repère est alors de la forme $z = py$ avec $p \neq 0$ (car *P* et *P*' ne sont ni parallèles, ni perpendiculaires).

On a de plus $\Omega(0, y_\Omega, py_\Omega)$ car $\Omega \in D$ et un système d'équations de *C* est :

$$(S) : \begin{cases} z = py \\ x^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - py_\Omega)^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = py \\ x^2 + (y - y_\Omega)^2 + (py - py_\Omega)^2 = R^2 \end{cases}$$

La deuxième équation se reformule en :

$$x^2 + (1 + p^2)(y - y_\Omega)^2 = R^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} = 1$$

avec $a = R$ et $b = \dfrac{R}{\sqrt{1 + p^2}}$.

Soit alors un point $M(x, y, z)$ de *C* et $M'(x, y, 0)$ son projeté orthogonal sur *P*' = (xOy).

Quand M décrit *C*, M' décrit la courbe de plan (xOy), d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_\Omega)^2}{b^2} = 1$ qui est une ellipse de centre $\Omega'(0, y_\Omega, 0)$, le projeté orthogonal de Ω sur *P*'.

Ainsi, la projection orthogonale de *C* sur *P*' est bien une ellipse.