Chapitre 7 : Rappels de géométrie dans l'espace

Produit Scalaire

Deux vecteurs de l'espace étant toujours coplanaires, la définition, les notations et les propriétés sont exactement les mêmes que dans le plan.

Expression analytique : Dans un repère *orthonormé*, avec $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$:

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Conséquence : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Barycentres

De même ici, la définition, les notations et les propriétés sont exactement les mêmes que dans le plan.

Plans

Un plan de l'espace peut être défini par :

- trois points non alignés (le plan est alors l'ensemble des barycentres de ces trois points) ;
- un point et deux vecteurs non colinéaires ;
- un point et un vecteur normal ;

… ou bien une situation se ramenant à l'un des trois cas précédents :

- Plan tangent à une sphère de centre Ω en un point A (vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}$).
- Plan médiateur d'un segment [AB] (point $I = \text{mil}[AB]$ et vecteur normal $\overrightarrow{AB}$).
- Plan parallèle à un autre plan, passant par un point A (les deux plans vectoriels sont les mêmes).
- Plan perpendiculaire à une droite *D*, passant par un point A (tout vecteur directeur de *D* est normal).
- Plan perpendiculaire à un autre plan *P*, passant par une droite *D* (à gérer suivant le mode de définition de *P* et *D*).
- …

Equations :

- Equation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ (avec $\vec{n}(a,b,c) \neq \vec{0}$ normal au plan dans un repère orthonormal).
- Equations paramétriques de la forme $\begin{cases} x = x_o + \lambda a + \mu a' \\ y = y_o + \lambda b + \mu b' \\ z = z_o + \lambda c + \mu c' \end{cases}$ avec $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{u}'(a',b',c')$ vecteurs non colinéaires du plan vectoriel associé et $A(x_o, y_o, z_o)$ un point du plan.

Droites

Une droite de l'espace peut être définie par :

- deux points distincts (la droite est alors l'ensemble des barycentres de ces deux points) ;
- un point et un vecteur directeur ;
- l'intersection de deux plans ;

… ou bien une situation se ramenant à l'un des deux cas précédents :

- Perpendiculaire à un plan en un point A (un vecteur normal au plan est directeur de la droite).
- Perpendiculaire à une droite *D* en un point $A \notin D$ (le vecteur formé par A et le projeté orthogonal de A sur *D* est directeur de la droite recherchée).
- Parallèle à une droite *D* en un point A (tout vecteur directeur de *D* est directeur de la droite recherchée).
- Perpendiculaire commune à deux droites *D* et *D*' non coplanaires (un vecteur directeur est donné par le produit vectoriel d'un vecteur directeur de *D* et d'un vecteur directeur de *D*' et l'intersection avec chacune des deux droites est non vides).
- …

Equations :

- Equations cartésiennes : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ avec (a,b,c) et (a',b',c') non proportionnels.
- Equations paramétriques : $\begin{cases} x = x_o + \lambda a \\ y = y_o + \lambda b \\ z = z_o + \lambda c \end{cases}$ avec $\vec{u}(a,b,c)$ directeur et $A(x_o, y_o, z_o)$ un point de la droite.

Sphères et cercles

Une sphère de l'espace peut être définie par :

- son centre Ω et son rayon R ;
- son centre Ω et un point A ;
- un diamètre [AB] ;
- une équation cartésienne du type $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ dans un repère orthonormal ;
- quatre points non coplanaires (sphère circonscrite au tétraèdre) ;
- …

Un cercle de l'espace peut être défini par :

- un plan qui le contient, son centre Ω et son rayon R ;
- un plan qui le contient, son centre Ω et un point A ;
- un plan qui le contient et un diamètre [AB] ;
- intersection d'un plan et d'une sphère ;
- trois points non alignés (cercle circonscrit au triangle) ;
- deux équations cartésiennes (plan + sphère) ;
- …

Positions relatives

- Un point et un plan (*le point appartient au plan ou pas, penser à la caractérisation barycentrique*).
- Un point et une droite (*le point appartient à la droite ou pas, penser à la caractérisation barycentrique*).
- Un point et une sphère (*le point appartient à la sphère ou pas*).
- Deux plans (*parallèles, sécants en une droite ou confondus ; plans perpendiculaires ou pas ?*).
- Deux droites (*non coplanaires ou coplanaires et, dans ce cas : parallèles, sécantes en un point ou confondues ; droites orthogonales/perpendiculaires ou pas ?*).
- Un plan et une droite (*droite incluse, parallèle ou sécante en un point ; droite perpendiculaire au plan ou pas ?*).
- Trois plans (*trois parallèles, deux parallèles et un sécant aux deux autres, sécants deux à deux en une droite, les trois sécants en une droite, les trois sécants en un point*).
- Un plan et une sphère (*sécants en un cercle, tangents, non sécants*).

Lignes de niveau

- $\mathcal{L}=\left\{\mathrm{M}\in \mathcal{E} \setminus \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathrm{k}\right\}$ avec k réel fixé.

  ☞ *$\mathcal{L}$ est le plan perpendiculaire à* (AB) *en* C *tel que* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathrm{k}$, *soit tel que* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\mathrm{k}\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}^2}$.

- $\mathcal{L}=\left\{\mathrm{M}\in \mathcal{E} \setminus \overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\mathrm{k}\right\}$ avec k réel fixé.

  ☞ *Introduire le point* I, *milieu de* [AB] *dans les deux vecteurs, on obtient* $\mathrm{IM}^2=\mathrm{k}-\mathrm{AI}^2$ *et :*

  - *si* $\mathrm{k}-\mathrm{AI}^2<0$, $\mathcal{L}=\varnothing$ *;*
  - *si* $\mathrm{k}=\mathrm{AI}^2$, $\mathcal{L}=\{\mathrm{I}\}$ *;*
  - *si* $\mathrm{k}-\mathrm{AI}^2>0$, *$\mathcal{L}$ est une sphère (la sphère de diamètre [AB] si* $\mathrm{k}=0$*).*

- $\mathcal{L}=\left\{\mathrm{M}\in \mathcal{E} \setminus \|\alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{CM}}+\ldots\|=\mathrm{k}\right\}$ ou $\mathcal{L}=\left\{\mathrm{M}\in \mathcal{E} \setminus \alpha\mathrm{AM}^2+\beta\mathrm{BM}^2+\gamma\mathrm{CM}^2+\ldots=\mathrm{k}\right\}$ avec k réel fixé.

  ☞ *Introduire le barycentre de* $(\mathrm{A},\alpha),(\mathrm{B},\beta),(\mathrm{C},\gamma),\ldots$ *s'il existe, sinon se débrouiller, par exemple en introduisant l'un des points* A, B, C…

- $\mathcal{L}=\left\{\mathrm{M}\in \mathcal{E} \setminus (\alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{CM}}+\ldots).(\alpha'\overrightarrow{\mathrm{A'M}}+\beta'\overrightarrow{\mathrm{B'M}}+\gamma'\overrightarrow{\mathrm{C'M}}+\ldots)=\mathrm{k}\right\}$ avec k réel fixé.

  ☞ *introduire les barycentres de* $(\mathrm{A},\alpha),(\mathrm{B},\beta),(\mathrm{C},\gamma),\ldots$ *et* $(\mathrm{A'},\alpha'),(\mathrm{B'},\beta'),(\mathrm{C'},\gamma'),\ldots$ *s'ils existent sinon se débrouiller, par exemple en introduisant l'un des points* A, B, C…

Dans les deux derniers cas, on se retrouve dans une situation du type $\overrightarrow{\mathrm{UM}}.\overrightarrow{\mathrm{VM}}=\mathrm{cste}$ *ou* $\overrightarrow{\mathrm{UM}}.\overrightarrow{\mathrm{UV}}=\mathrm{cste}$ *où U et V sont des points fixés.*