Concours Blanc de Mathématiques n° 1

4 heures

Calculatrices interdites

Exercice 1

Partie A – Résolution d'équations différentielles

1) Résoudre l'équation différentielle :
$$(E_0)\ :\ z'+(\text{th}\,t)z=0$$
où z est une fonction de la variable réelle t, à valeurs réelles.

Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0)=1$.

2) Résoudre l'équation différentielle :
$$(E)\ :\ z'+(\text{th}\,t)z=t\times\text{th}\,t$$
Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0)=0$.

Partie B – Etude d'un arc paramétré

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe Γ représentée paramétriquement par :
$$\begin{cases} x(t)=t-\text{th}\,t \\ y(t)=\dfrac{1}{\text{ch}\,t} \end{cases}$$

3) Démontrer que Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera.

4) Etudier Γ. On étudiera en particulier les branches infinies et la tangente éventuelle au(x) point(s) stationnaire(s). Donner l'allure de la courbe Γ.

5) Calculer $\text{ch}\,t$ et $\text{sh}\,t$ lorsque $\text{sh}\,t=1$, ainsi que la valeur de t correspondante (on exprimera le résultat sous la forme d'un logarithme népérien).

6) Déterminer les coordonnées du point B de Γ où la tangente à la courbe a pour coefficient directeur – 1. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ en B.

7) a. Déterminer un vecteur directeur simple puis une équation cartésienne de la tangente à Γ au point M(t) de paramètre t.

b. La tangente à Γ au point M(t) coupe l'axe des abscisses au point N(t). Prouver que la distance de M(t) à N(t) est constante.

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par :
$$f(z)=z^2+z+1.$$
On appelle F l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe $f(z)$.

1) Résoudre $f(z)=0$.

2) a. $\forall z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$ la forme algébrique de z. Déterminer la forme algébrique de $f(z)$ en fonction de x et y.

b. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $f(z)$ soit réel.

c. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. On donnera la nature de cet ensemble ainsi que ses éléments caractéristiques.

3) a. Montrer que l'image par F du cercle trigonométrique est la courbe définie en polaires par :

$$\rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta .$$

b. Etudier et représenter cette courbe.

4) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Résoudre :

$$\sum_{k=0}^{n-1} [f(z) - z]^k = 0 .$$

On donnera le module et un argument de chacune des solutions.

Exercice 3

Soit β un réel fixé. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y'' - 2iy' + (\beta - 1)y = (1+i)e^{it} .$$

1) Résoudre l'équation (E). On considérera trois cas : $\beta > 0$ (on posera alors $\beta = b^2$), $\beta = 0$ et $\beta < 0$ (on posera alors $\beta = -b^2$).

2) Par définition, une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est bornée si son module l'est. Soit f une solution de (E). Prouver que f est bornée si et seulement si $\beta > 0$.

Dans la fin de cet exercice, on prend $\beta = 4$.

3) Déterminer la solution z de (E) telle que $z(0) = 1 + i$ et $z'(0) = \dfrac{1-i}{2}$.

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $M(t)$ le point d'affixe $z(t)$ où z est la fonction à valeurs complexes trouvée dans la question précédente. On appelle $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et *C* le courbe décrite par $M(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$.

a. Soit $\vec{u} = \vec{u}_{\pi/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{v}_{\pi/4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$. Etablir que si $M(t)$ a pour coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on a :

$$\begin{cases} X(t) = \sqrt{2}\cos t \\ Y(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t \end{cases}$$

b. Identifier alors la courbe *C*. Donner son excentricité ainsi que les coordonnées de ses foyers F et F' dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c. On appelle Γ le cercle de centre F' et de rayon $2\sqrt{2}$. Soit M un point de *C*. Montrer que M est le centre d'un cercle tangent à Γ et passant par F.