Corrigé du Concours Blanc de Mathématiques n° 1

Exercice 1

Partie A – Résolution d'équations différentielles

1) L'équation (E_0) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre. Ses solutions sont de la forme $t \mapsto K\exp\left(-\int^t \operatorname{th} u\,du\right)$ avec K constante.

Or, $\operatorname{th} = \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}} = \dfrac{\operatorname{ch}'}{\operatorname{ch}}$ et la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc, on peut prendre $\int^t \operatorname{th} u\,du = \ln(\operatorname{ch} t)$ et :

$$\exp\left(-\int^t \operatorname{th} u\,du\right) = \exp\left(-\ln(\operatorname{ch} t)\right) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les solutions à valeurs réelles de } (E_0) \text{ sont les fonctions } t \mapsto \frac{K}{\operatorname{ch} t} \text{ avec } K \in \mathbb{R}.}$$

Si z_1 est la solution de (E_0) telle que $z_1(0) = 1$, on a $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $z_1(t) = \dfrac{K}{\operatorname{ch} t}$ et $z_1(0) = \dfrac{K}{\operatorname{ch} 0} = K = 1$ donc :

$$\boxed{z_1 : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} t}}$$

2) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre dont l'équation homogène associée est (E_0). On cherche alors une solution particulière sous la forme $t \mapsto \dfrac{K(t)}{\operatorname{ch} t}$ avec K fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En réinjectant dans (E), on obtient :

$$\frac{K'(t)}{\operatorname{ch} t} - \frac{K(t)\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} + (\operatorname{th} t)\frac{K(t)}{\operatorname{ch} t} = \frac{K'(t)}{\operatorname{ch} t} - \frac{K(t)\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} + \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\frac{K(t)}{\operatorname{ch} t} = \frac{K'(t)}{\operatorname{ch} t} = t \times \operatorname{th} t = t \times \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}.$$

Soit :

$$K'(t) = t \times \operatorname{sh} t.$$

Une intégration par parties donne :

$$K(t) = \int^t u \times \operatorname{sh} u\,du = t \times \operatorname{ch} t - \int^t \operatorname{ch} u\,du = t \times \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t.$$

Ainsi, une solution particulière de (E) est $t \mapsto \dfrac{t \times \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = t - \operatorname{th} t$ et finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions à valeurs réelles de } (E) \text{ sont les fonctions } t \mapsto t - \operatorname{th} t + \frac{K}{\operatorname{ch} t} \text{ avec } K \in \mathbb{R}.}$$

Si z_2 est la solution de (E) telle que $z_2(0) = 0$, on a $z_2 : t \mapsto t - \operatorname{th} t + \dfrac{K}{\operatorname{ch} t}$ et $z_1(0) = \dfrac{K}{\operatorname{ch} 0} = K = 0$, d'où :

$$\boxed{z_2 : t \mapsto t - \operatorname{th} t}$$

Partie B – Etude d'un arc paramétré

Oh surprise, les fonctions x et y de cette partie sont les fonctions z_2 et z_1 de la partie précédente !

3) Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(-t) = -t - \operatorname{th}(-t) = -t + \operatorname{th} t = -x(t) \\ y(-t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(-t)} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = y(t) \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont respectivement impaires et paires donc :

$$\boxed{\Gamma \text{ est symétrique par rapport à } (Oy).}$$

4) Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ respectivement en tant que différence et inverse de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (le fonction ch ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$) et $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - (1 - \operatorname{th}^2 t) = \operatorname{th}^2 t \\ y'(t) = -\dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \end{cases}$$

Du fait de la symétrie vue à la question 3, on peut limiter l'étude à $\mathbb{R}_+$.

On a $x'(t) > 0$ et $y'(t) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x'(0) = y'(0) = 0$. Il y a un point stationnaire en $t = 0$.

Si on pose $\vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a :

$$\vec{f}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} = \operatorname{th}^2 t\,\vec{i} - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{j} = \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{i} - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{j} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}(\operatorname{sh} t\,\vec{i} - \vec{j}).$$

Donc $\vec{f}\,'(t)$ est colinéaire à $\operatorname{sh} t\,\vec{i} - \vec{j}$ qui vaut $-\vec{j}$ en $t = 0$, donc Γ admet une tangente verticale en $t = 0$.

Par ailleurs :

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} (t - \operatorname{th} t) = +\infty \ (\text{car } \lim_{t\to+\infty} \operatorname{th} t = 1).$$

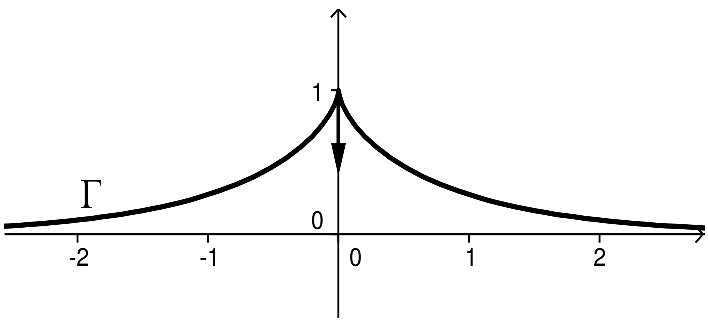
La courbe Γ admet l'axe des abscisses pour asymptote quand $t \to +\infty$ (et $t \to -\infty$ par symétrie).

De plus, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t} > 0$, donc Γ est toujours au-dessus de son asymptote.

Sur $\mathbb{R}_+$, on a le tableau :

t	0		$+\infty$
x	0	↗	$+\infty$
y	1	↘	0

On obtient la courbe :



5) Si $\operatorname{sh} t = 1$, on a $\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{2}$ et $\operatorname{th} t = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

De plus, on a :

$$e^t - e^{-t} = 2\operatorname{sh} t = 2 \iff e^{2t} - 2e^t = 1 \iff e^{2t} - 2e^t + 1 = (e^t - 1)^2 = 2 \iff e^t = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Mais $1 - \sqrt{2} < 0$ donc ne peut être égal à e^t et ainsi, $e^t = 1 + \sqrt{2}$, soit $t = \ln(1+\sqrt{2})$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Si } \operatorname{sh} t = 1,\ \operatorname{ch} t = \sqrt{2},\ \operatorname{th} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } t = \ln(1+\sqrt{2}).}$$

6) Une droite de coefficient directeur – 1 admet pour vecteur directeur $\vec{u}(1, -1)$.

On a vu plus haut que la courbe Γ admet une tangente en tous points dirigée par $\operatorname{sh} t\,\vec{i} - \vec{j}$ (qui est colinéaire à $\vec{f}\,'(t)$) donc la tangente à Γ a pour coefficient directeur – 1 si et seulement si les vecteurs $\operatorname{sh} t\,\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{u}(1, -1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det(\operatorname{sh} t\,\vec{i} - \vec{j}, \vec{u}) = 0$. On a :

$$\det(\operatorname{sh} t\,\vec{i} - \vec{j}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} t & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\operatorname{sh} t + 1.$$

Ainsi, la tangente à Γ a pour coefficient directeur – 1 si et seulement si $-\operatorname{sh} t + 1 = 0$, soit $\operatorname{sh} t = 1$ (nouvelle surprise incommensurable !).

On a vu dans la question précédente qu'alors $\operatorname{ch} t = \sqrt{2}$, $\operatorname{th} t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $t = \ln(1+\sqrt{2})$, donc :

$$x(t) = \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Finalement :

$$\boxed{\Gamma \text{ admet une tangente de coefficient directeur } -1 \text{ en } B\left(\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).}$$

Comme la pente de la tangente à Γ en B vaut – 1 (et cette tangente passe pare B), une équation réduite de cette droite est $y = -(x - x_B) + y_B = -x + x_B + y_B$, soit :

$$\boxed{y = -x + \ln(1+\sqrt{2})}$$

7) a. On a vu plus haut qu'un vecteur directeur simple de la tangente à Γ au point M(t) de paramètre t est :

$$\vec{T}(t) = \operatorname{sh} t\,\vec{i} - \vec{j}.$$

Une équation cartésienne de cette tangente est alors donnée par $\det\left(\vec{T}(t), \overrightarrow{M(t)M}\right) = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} t & x - x(t) \\ -1 & y - y(t) \end{vmatrix} = 0$, soit :

$$\operatorname{sh} t\,\big(y - y(t)\big) + x - x(t) = 0.$$

Avec les expressions de x(t) et y(t), on obtient :

$$\operatorname{sh} t\left(y - \frac{1}{\operatorname{ch} t}\right) + x - t + \operatorname{th} t = 0 \iff y\operatorname{sh} t - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} + x - t + \operatorname{th} t = y\operatorname{sh} t + x - t = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de la tangente à } \Gamma \text{ au point M(t) de paramètre t est } x + y\operatorname{sh} t = t.}$$

b. Soit (x_N, y_N) les coordonnées de N(t), le point d'intersection de la tangente à Γ au point M(t) et (Ox). Remarquons que comme dans l'équation cartésienne trouvée plus haut, le coefficient de x vaut 1, donc n'est jamais nul, la tangente à Γ au point M(t) n'est jamais parallèle à (Ox) donc le point N(t) est défini $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

$N(t) \in (Ox)$, donc $y_N = 0$ et comme N(t) est sur la tangente d'équation $x + y\,\mathrm{sh}\,t = t$, on a $x_N = t$.
Ainsi, les coordonnées de N(t) sont $(t, 0)$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$M(t)N(t)^2 = \left(t - x(t)\right)^2 + \left(-y(t)\right)^2 = \mathrm{th}^2 t + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t} = \mathrm{th}^2 t + 1 - \mathrm{th}^2 t = 1.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R},\ M(t)N(t) = 1.}$$

Exercice 2

1) $f(z) = 0 \iff z^2 + z + 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont connues :

$$\boxed{f(z) = 0 \iff z = j \text{ ou } \bar{j}.}$$

2) a. Avec $z = x + iy$, on a :

$$f(z) = z^2 + z + 1 = (x + iy)^2 + x + iy + 1 = x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy + 1.$$

Soit :

$$\boxed{f(x + iy) = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)}$$

b. On a $f(z) \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}\left[f(z)\right] = 0$ donc, d'après ce qui précède, avec $z = x + iy$:

$$f(z) \in \mathbb{R} \iff 2xy + y = 0 \iff (2x + 1)y = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \text{ ou } y = 0.$$

Ainsi :

L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $f(z)$ soit réel est la réunion de deux droites d'équations respectives : $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 0$.

c. On a $f(z) \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\left[f(z)\right] = 0$ donc, d'après ce qui précède, avec $z = x + iy$:

$$f(z) \in i\mathbb{R} \iff x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \iff y^2 - (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}.$$

Cette dernière équation est celle d'une hyperbole équilatère de centre $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$ et d'axe la parallèle à (Oy) passant par Ω avec $a = b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

Si le plan complexe est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, appelons x et y les coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et X et Y les coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. On a alors $X = x + \frac{1}{2}$ et $Y = y$.

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:

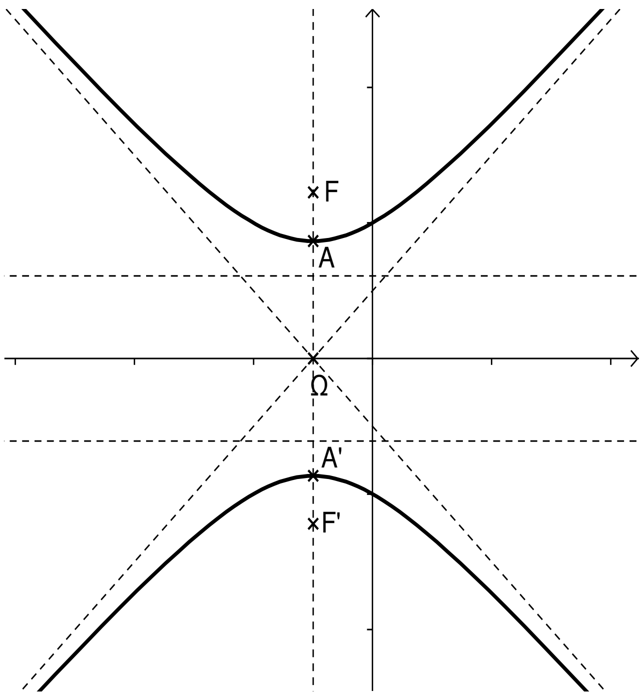
- L'axe a pour équation $X = 0$.
- Les sommets ont pour coordonnées $(0, a)$ et $(0, -a)$.
- Les foyers ont pour coordonnées $(0, c)$ et $(0, -c)$.
- Les directrices ont pour équations $Y = \frac{a^2}{c}$ et $Y = -\frac{a^2}{c}$.
- Les asymptotes ont pour équations $Y = X$ et $Y = -X$.

En revenant dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $f(z)$ soit imaginaire pur est une hyperbole équilatère et :

- son centre est $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$;
- son axe a pour équation $x = -\frac{1}{2}$;
- ses sommets ont pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$;
- ses foyers ont pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ et $(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$;
- ses directrices ont pour équations $y = \frac{\sqrt{6}}{4}$ et $y = -\frac{\sqrt{6}}{4}$;
- ses asymptotes ont pour équations $y = x + \frac{1}{2}$ et $y = -x - \frac{1}{2}$;
- son excentricité est $\sqrt{2}$.

On a la figure :



3) a. Si on note *C* le cercle trigonométrique, d'équation paramétrique complexe $z = e^{i\theta}$, l'image par F du cercle trigonométrique est l'ensemble des points d'affixe $f(e^{i\theta})$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Or, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta} + e^{i\theta} + 1 = (e^{i\theta} + 1 + e^{-i\theta})e^{i\theta} = (1 + 2\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})e^{i\theta} = (1 + 2\cos\theta)e^{i\theta}.$$

Comme $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta$ est réel :

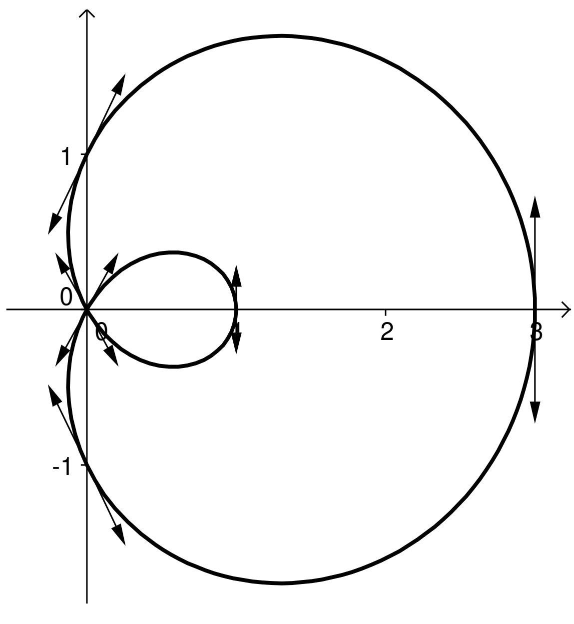
$$\boxed{\text{L'image par F du cercle trigonométrique est bien la courbe définie en polaires par } \rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta.}$$

b. La fonction $\theta \mapsto \rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- ρ est 2π-périodique donc on peut l'étudier sur tout intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$.
- $\forall\, \theta \in [-\pi, \pi]$, $-\theta \in [-\pi, \pi]$ et $\rho(-\theta) = 1 + 2\cos(-\theta) = 1 + 2\cos\theta = \rho(\theta)$ donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et on peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.
- La fonction ρ est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\rho'(\theta) = -2\sin\theta \leq 0$.
- Sur $[0, \pi]$, $\rho(\theta) > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta < \frac{2\pi}{3}$. On obtient le tableau :

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\rho'(\theta)$	0	$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	0
ρ	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\rho(\theta)$		$+$	0	$-$	

- Comme ρ et ρ' ne s'annulent pas en même temps, tous les point de la courbe sont réguliers et :
  - En $\theta = 0$, on a $\rho'(\theta) = 0$ et $\rho(\theta) \neq 0$, donc la tangente est dirigée par $\vec{v}_0 = \vec{j}$ donc verticale.
  - En $\theta = \frac{2\pi}{3}$, on a $\rho'(\theta) \neq 0$ et $\rho(\theta) = 0$, donc la tangente est dirigée par $\vec{u}_{2\pi/3}$.
  - En $\theta = \pi$, on a $\rho'(\theta) = 0$ et $\rho(\theta) \neq 0$, donc la tangente est dirigée par $\vec{v}_\pi = -\vec{j}$ donc verticale.
- En $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\rho(\theta) = 1$ et $\rho'(\theta) = -2$. La tangente est dirigée par $-2\vec{u}_{\pi/2} + \vec{v}_{\pi/2} = -(\vec{i} + 2\vec{j})$.
- On obtient la courbe (complétée par symétrie) :



4) Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}[f(z)-z]^k = 0 \iff \sum_{k=0}^{n-1}(z^2+1)^k = 0.$$

On a $z^2+1=1 \iff z=0$ et il est clair que 0 n'est pas solution de l'équation ci-dessus, donc on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n-1}[f(z)-z]^k = 0 \iff \frac{(z^2+1)^n-1}{(z^2+1)-1} = 0 \iff (z^2+1)^n = 1.$$

Ainsi, z est solution de l'équation si et seulement si z^2+1 est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1, soit :

$$z^2+1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \iff z^2 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1 = e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}) = e^{i\frac{k\pi}{n}} 2i\sin\frac{k\pi}{n} \iff z^2 = 2e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

avec $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Or, si $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$ et $\sin\frac{k\pi}{n} > 0$ donc :

$$z^2 = 2e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}\sin\frac{k\pi}{n} \iff z = \pm\, e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}}.$$

Ainsi :

> Les solutions de $\sum_{k=0}^{n-1}[f(z)-z]^k = 0$ sont les nombres de la forme :
>
> $$e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}} \quad \text{et} \quad -\,e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}}$$
>
> avec $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Enfin, $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}} > 0$ donc (avec $e^{i\pi} = -1$), on a $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$:

- $\left|e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}}\right| = \sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}}$ et $\arg\left(e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}}\right) = \frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- $\left|-\,e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}}\right| = \sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}}$ et $\arg\left(-\,e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{2\sin\frac{k\pi}{n}}\right) = \frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{4}+\pi\ [2\pi]$.

Exercice 3

1) L'équation homogène associée à (E) est $y''-2iy'+(\beta-1)y=0$ d'équation caractéristique $r^2-2ir+\beta-1=0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2i)^2-4(\beta-1) = -4-4\beta+4 = -4\beta$ dont le signe est opposé à celui de β. Il y a donc trois cas :

- <u>$\beta > 0$.</u>

  On pose $\beta = b^2$ donc $\Delta = -4b^2 = (2ib)^2$ et les racines de l'équation caractéristique sont $i(1-b)$ et $i(1+b)$.
  Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{i(1-b)t} + \mu e^{i(1+b)t}$ avec λ et μ constantes complexes.

- <u>$\beta = 0$.</u>

  On a alors $\Delta = 0$ et l'équation caractéristique admet i pour racine double.
  Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto (\lambda t+\mu)e^{it}$ avec λ et μ constantes complexes.

- $\underline{\beta < 0}$.

  On pose $\beta = -b^2$ donc $\Delta = 4b^2 = (2b)^2$ et les racines de l'équation caractéristique sont $i-b$ et $i+b$.

  Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{(i-b)t} + \mu e^{(i+b)t}$ avec λ et μ constantes complexes.

Cherchons une solution particulière de (E). Le second membre $(1+i)e^{it}$ est de la forme $ae^{\alpha t}$ avec $\alpha = i$. Il y ici uniquement deux cas :

- $\underline{\beta \neq 0}$.

  Dans ce cas, $\alpha = i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique (car les racines sont soit $i-ib$ et $i+ib$, soit $i-b$ et $i+b$ qui sont toujours différentes de i quand $\beta \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$). On cherche alors une solution particulière y_P de (E) telle que $y_P(t) = Ke^{it}$ avec K constante complexe.

  On a $y_P'(t) = iKe^{it}$ et $y_P''(t) = -Ke^{it}$, donc en réinjectant dans (E), on obtient $\beta Ke^{it} = (1+i)e^{it}$, soit $K = \dfrac{1+i}{\beta}$. Une solution particulière est donc $t \mapsto \dfrac{1+i}{\beta}e^{it}$.

- $\underline{\beta = 0}$.

  Dans ce cas, $\alpha = i$ est racine double de l'équation caractéristique et on cherche alors une solution particulière y_P de (E) telle que $y_P(t) = (At^2 + Bt + C)e^{it}$ avec A, B et C constantes complexes. Mais quels que soient B et C, la fonction $t \mapsto (Bt + C)e^{it}$ est solution de l'équation homogène donc on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme plus simple $y_P(t) = At^2e^{it}$.

  On a $y_P'(t) = 2Ate^{it} + iAt^2e^{it}$ et $y_P''(t) = 2Ae^{it} + 4iAte^{it} - At^2e^{it}$ $y_P''(t) = -Ke^{it}$, donc en réinjectant dans l'équation (E), sans oublier que $\beta = 0$, on obtient $2Ae^{it} = (1+i)e^{it}$, soit $A = \dfrac{1+i}{2}$. Une solution particulière est alors $t \mapsto \dfrac{1+i}{2}t^2e^{it}$.

Finalement :

> Les solutions de (E) sont de la forme :
>
> - $t \mapsto \lambda e^{i(1-b)t} + \mu e^{i(1+b)t} + \dfrac{1+i}{b^2}e^{it}$ si $\beta = b^2 > 0$,
> - $t \mapsto \lambda e^{(i-b)t} + \mu e^{(i+b)t} - \dfrac{1+i}{b^2}e^{it}$ si $\beta = -b^2 < 0$,
> - $t \mapsto \left(\dfrac{1+i}{2}t^2 + \lambda t + \mu\right)e^{it}$ si $\beta = 0$,
>
> avec λ et μ constantes complexes.

2) Soit f une solution de (E). En reprenant les trois cas précédents, on a :

- Si $\beta = b^2 > 0$, alors $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lambda e^{i(1-b)t} + \mu e^{i(1+b)t} + \dfrac{1+i}{b^2}e^{it} = \left(\lambda e^{-ibt} + \mu e^{ibt} + \dfrac{1+i}{b^2}\right)e^{it}$ donc $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$|f(t)| = \left|\lambda e^{-ibt} + \mu e^{ibt} + \frac{1+i}{b^2}\right| \leq \left|\lambda e^{-ibt}\right| + \left|\mu e^{ibt}\right| + \left|\frac{1+i}{b^2}\right| = |\lambda| + |\mu| + \frac{\sqrt{2}}{b^2}.$$

Comme $M=|\lambda|+|\mu|+\frac{\sqrt{2}}{b^2}$ est un réel fixé, indépendant de t, on a $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|\leq M$ et ainsi, f est bornée.

- Si $\beta=0$, alors $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\left(\frac{1+i}{2}t^2+\lambda t+\mu\right)e^{it}$ donc $|f(t)|=\left|\frac{1+i}{2}t^2+\lambda t+\mu\right|$.

  Or, $\lim\limits_{t\to+\infty}|f(t)|=+\infty$ donc f n'est pas bornée.

- Si $\beta=-b^2<0$, alors $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\lambda e^{(i-b)t}+\mu e^{(i+b)t}-\frac{1+i}{b^2}e^{it}=\left(\lambda e^{-bt}+\mu e^{bt}-\frac{1+i}{b^2}\right)e^{it}$ donc $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|=\left|\lambda e^{-bt}+\mu e^{bt}-\frac{1+i}{b^2}\right|$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}|f(t)|=+\infty$ donc f n'est pas bornée.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\text{Une solution f de (E) est bornée si et seulement si } \beta>0.}$$

3) Si $\beta=4>0$, on prend $b=2$ et les solutions de (E) sont de la forme $t\mapsto\lambda e^{-it}+\mu e^{3it}+\frac{1+i}{4}e^{it}$ avec λ et μ constantes. Si z est la solution de (E) telle que $z(0)=1+i$ et $z'(0)=\frac{1-i}{2}$, on a :

- $z(0)=\lambda+\mu+\frac{1+i}{4}=1+i$ donc $\lambda+\mu=\frac{3}{4}(1+i)$ **(1)**
- $z'(0)=-i\lambda+3i\mu+\frac{1+i}{4}i=\frac{1-i}{2}$ donc $-\lambda+3\mu=\frac{1}{i}\frac{1-i}{2}-\frac{1+i}{4}=\frac{-i(1-i)}{2}-\frac{1+i}{4}$, soit $-\lambda+3\mu=-\frac{3}{4}(1+i)$ **(2)**

En faisant **(1)** + **(2)**, on obtient $4\mu=0$, soit $\mu=0$ et **(1)** donne immédiatement $\lambda=\frac{3}{4}(1+i)$.

Ainsi, la solution z de (E) recherchée est :

$$\boxed{z:t\mapsto\frac{1+i}{4}(3e^{-it}+e^{it})}$$

4) a. Soit M un point de coordonnées (x,y) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (X,Y) dans $(O,\vec{u},\vec{v})$. On a :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}+Y\vec{v}=X\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})+Y\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i}+\vec{j})=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\vec{j}.$$

Donc, par unicité des coordonnées, on obtient les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)=\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

En inversant ce système, on obtient :

$$\begin{cases} X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{cases}$$

Par ailleurs, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $z(t) = \frac{1+i}{4}(3e^{-it} + e^{it}) = \frac{1+i}{4}(4\cos t - 2i\sin t) = \cos t + \frac{1}{2}\sin t + i\cos t - \frac{1}{2} i\sin t$ donc :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + \frac{1}{2}\sin t \\ y(t) = \cos t - \frac{1}{2}\sin t \end{cases}$$

Et avec les formules de changement de repère que l'on vient d'obtenir, on aboutit bien à :

$$\boxed{\begin{cases} X(t) = \sqrt{2}\cos t \\ Y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t \end{cases}}$$

b. Remarquons qu'en posant $t' = -t$, quand t décrit $\mathbb{R}$, t' aussi et on a :

$$\begin{cases} X(t') = \sqrt{2}\cos t' \\ Y(t') = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t' \end{cases}$$

On retrouve le paramétrage classique d'une ellipse et ainsi :

$$\boxed{\mathit{C} \text{ est une ellipse.}}$$

Une équation cartésienne de *C* est $\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{Y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$ donc le demi grand axe de *C* est $a = \sqrt{2}$ et son demi petit axe est $b = 1/\sqrt{2}$. On a alors $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ donc :

- $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Les foyers F et F' ont pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$. En utilisant les formules de changement de repère $x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$ vues dans la question a., on obtient $F\left(\frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{2}}\right)$ et $F'\left(\frac{-c}{\sqrt{2}}, \frac{-c}{\sqrt{2}}\right)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Finalement :

$$\boxed{e = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } F'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}).}$$

c. Soit $M \in \mathit{C}$. Remarquons que le résultat voulu se reformule en « le cercle de centre M et de rayon MF est tangent à Γ ». Appelons alors C_M le cercle de centre M et de rayon MF.

D'après la définition bifocale de l'ellipse, on a $MF + MF' = 2a = 2\sqrt{2}$, soit $MF' = 2\sqrt{2} - MF$.

Or, on sait que deux cercles de centre Ω et Ω', et de rayons R et R' sont tangents (intérieurement) si et seulement si $\Omega\Omega' = |R - R'|$. Comme cette relation est satisfaite ici ($MF' = 2\sqrt{2} - MF$), Γ et C_M sont tangents (intérieurement) et ainsi :

$$\boxed{\text{M est le centre d'un cercle tangent à } \Gamma \text{ et passant par F.}}$$

On a la figure :