

Corrigé du DS n° 2

Exercice 1

1) Comme A est sur le cercle C , on $\Omega A = R$ et comme $(\vec{I}, \overrightarrow{\Omega A}) = \alpha$, les coordonnées polaires du point A sont (R, α) , donc ses coordonnées cartésiennes sont $(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$.

La tangente \mathcal{T} est la droite perpendiculaire à (ΩA) en A , donc un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) appartient à \mathcal{T} si et seulement si $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Ainsi :

$$M(x, y) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow R \cos \alpha (x - R \cos \alpha) + R \sin \alpha (y - R \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0 \text{ (car } R \neq 0 \text{)}.$$

Ainsi :

$$\text{Une équation cartésienne de } \mathcal{T} \text{ est } x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0.$$

Tout point M de \mathcal{T} admet des coordonnées polaires (r, θ) car $M \neq \Omega$ (en effet, une tangente à un cercle ne passe pas par son centre) avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. En remplaçant dans l'équation cartésienne trouvée ci-dessus, on obtient :

$$r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha = R \Leftrightarrow r \cos(\theta - \alpha) = R.$$

Ainsi :

$$\text{L'équation polaire de } \mathcal{T} \text{ est } r = \frac{R}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

Enfin, d'après l'équation cartésienne trouvée plus haut, un vecteur directeur de \mathcal{T} est $\vec{u}(-R \sin \alpha, R \cos \alpha)$ donc :

$$M(x, y) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t \vec{u}.$$

En passant aux coordonnées, on obtient la représentation paramétrique de \mathcal{T} :

$$\begin{cases} x = R \cos \alpha - Rt \sin \alpha \\ y = R \sin \alpha + Rt \cos \alpha \end{cases}$$

2) Comme $\vec{I} = \frac{\overrightarrow{\Omega \Omega'}}{\Omega \Omega'}$ et $a = \Omega \Omega'$, on a $\overrightarrow{\Omega \Omega'} = a \vec{I}$ donc $\Omega'(a, 0)$.

Comme \mathcal{T} est tangente à C , c'est une tangente commune à C et C' si et seulement si elle est tangente à C' .

Or, \mathcal{T} est tangente à C' si et seulement si la distance du centre de C' , Ω' , à la droite \mathcal{T} vaut le rayon de C' , soit R' .

Comme on l'a vu plus haut, une équation cartésienne de \mathcal{T} est $x \cos \alpha + y \sin \alpha - R = 0$ donc :

$$d(\Omega', \mathcal{T}) = \frac{|x_{\Omega'} \cos \alpha + y_{\Omega'} \sin \alpha - R|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = |a \cos \alpha - R|.$$

Ainsi, \mathcal{T} est une tangente commune à C et C' si et seulement si $|a \cos \alpha - R| = R'$, soit :

$$\mathcal{T} \text{ est commune à } C \text{ et } C' \text{ si et seulement si } (a \cos \alpha - R)^2 = R'^2.$$

3) D'après le cours, avec $a = \Omega\Omega'$ et $R > R'$ (donc $|R - R'| = R - R'$), on a :

- Si $a < R - R'$, C et C' ne se coupent pas et C' est à l'intérieur C .
- Si $a = R - R'$, C et C' se coupent en un point et sont tangents intérieurement.
- Si $R - R' < a < R + R'$, C et C' se coupent en deux points distincts.
- Si $a = R + R'$, C et C' se coupent en un point et sont tangents extérieurement.
- Si $a > R + R'$, C et C' ne se coupent pas et les deux cercles sont extérieurs.

4) On a $(a \cos \alpha - R)^2 = R'^2 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{R \pm R'}{a}$.

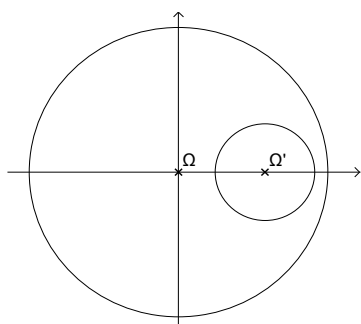
Considérons chacun des cas de la question précédente :

- Si $a < R - R' < R + R'$, on a $\frac{R - R'}{a} > 1$ et $\frac{R + R'}{a} > 1$ donc on ne peut pas avoir $\cos \alpha = \frac{R \pm R'}{a}$ et ainsi, C et C' n'ont pas de tangente commune.
- Si $a = R - R' < R + R'$, on a $\frac{R - R'}{a} = 1$ et $\frac{R + R'}{a} > 1$ donc $(a \cos \alpha - R)^2 = R'^2 \Leftrightarrow \cos \alpha = 1$, soit $\alpha = 0[2\pi]$. Il y a donc une unique valeur (modulo 2π) de α possible et C et C' ont une tangente commune (qui est la tangente au point d'intersection de C et C' , de coordonnées $(0, R)$).
- Si $R - R' < a < R + R'$, on a $0 < \frac{R - R'}{a} < 1$ et $\frac{R + R'}{a} > 1$ et $(a \cos \alpha - R)^2 = R'^2 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{R - R'}{a}$, soit $\alpha = \pm \arccos\left(\frac{R - R'}{a}\right)[2\pi]$. Il y a donc deux valeurs (modulo 2π) de α possibles et C et C' ont deux tangentes communes.
- Si $a = R + R' > R - R'$, on a $0 < \frac{R - R'}{a} < 1$ et $\frac{R + R'}{a} = 1$. Alors, $\cos \alpha = \frac{R - R'}{a}$ ou $\cos \alpha = 1$, donc $\alpha = 0[2\pi]$ ou $\alpha = \pm \arccos\left(\frac{R - R'}{a}\right)[2\pi]$. Il y a donc trois valeurs (modulo 2π) de α possibles et C et C' ont trois tangentes communes (dont une au point d'intersection de C et C' , de coordonnées $(0, R)$).
- Si $a > R + R' > R - R'$, on a $0 < \frac{R - R'}{a} < 1$ et $0 < \frac{R + R'}{a} < 1$. Alors, $\alpha = \pm \arccos\left(\frac{R - R'}{a}\right)[2\pi]$ ou $\alpha = \pm \arccos\left(\frac{R + R'}{a}\right)[2\pi]$. Il y a donc quatre valeurs (modulo 2π) de α possibles et C et C' ont quatre tangentes communes.

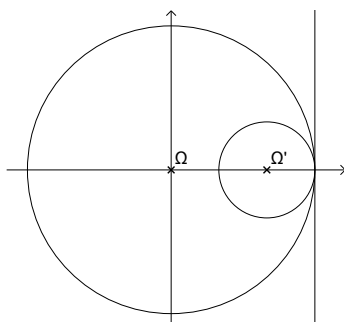
Finalement :

- Si C' est à l'intérieur C , ils n'ont aucune tangente commune.
- Si C et C' sont tangents intérieurement, ils ont une tangente commune (au point de tangence).
- Si C et C' se coupent en deux points distincts, ils ont deux tangentes communes.
- Si C et C' sont tangents extérieurement, ils ont trois tangentes communes (dont une au point de tangence).
- Si C et C' sont extérieurs, ils ont quatre tangentes communes.

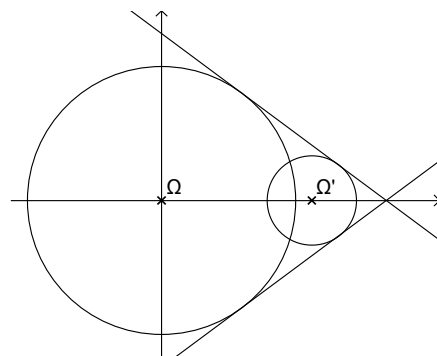
On a les figures :



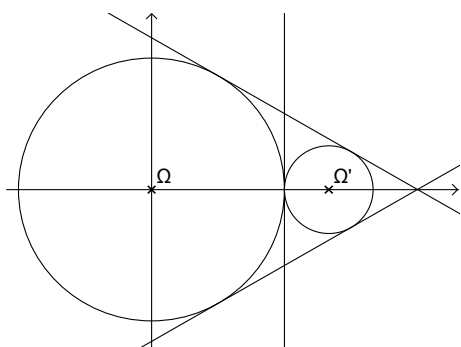
C' est à l'intérieur C



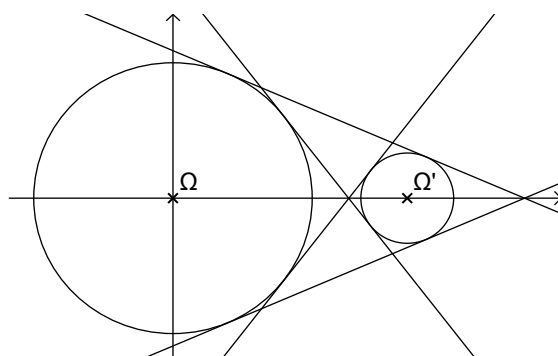
C et C' sont tangents intérieurement



C et C' se coupent en deux points distincts



C et C' sont tangents extérieurement



C et C' sont extérieurs

5) Ici, on a $\overline{\Omega\Omega'} = 2\vec{j}$ donc $a = \Omega\Omega' = 2$. De plus, $R = 2$ et $R' = 1$, donc $R - R' = 1$ et $R + R' = 3$.

Ainsi, $R - R' < a < R + R'$ donc C et C' sont sécants en deux points distincts et donc :

C et C' ont deux tangentes communes.

Pour trouver les équations de ces deux tangentes, changeons de repère pour se retrouver dans la situation des questions précédentes. Comme $\overline{\Omega\Omega'} = 2\vec{j}$, on prend $\vec{I} = \vec{j}$ et $\vec{J} = -\vec{i}$ qui est directement orthogonal à $\vec{I} = \vec{j}$ et on se place dans $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$. Appelons (x, y) les coordonnées d'un point M dans l'ancien repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et (X, Y) les coordonnées de M dans le nouveau repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$.

On a $\overline{\Omega M} = \overline{OM} - \overline{O\Omega} = (x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j}$ et $\overline{\Omega M} = X\vec{I} + Y\vec{J} = X\vec{j} - Y\vec{i}$ donc :

$$\begin{cases} X = y+1 \\ Y = 1-x \end{cases}$$

Si A est un point de C par lequel passe une tangente commune à C et C' , on a, en conservant les notations des questions précédentes, $(\vec{I}, \overline{\Omega A}) = \alpha$, avec $\cos \alpha = \frac{R - R'}{a}$ ($\cos \alpha = \frac{R + R'}{a}$ étant exclue car $\frac{R + R'}{a} > 1$).

Avec les valeurs numériques, on obtient $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ donc $\alpha = \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Les deux valeurs possibles de α donnent deux points de tangence possibles A_1 et A_2 , de coordonnées polaires dans $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$: $(2, \frac{\pi}{3})$ et $(2, -\frac{\pi}{3})$ soit, en coordonnées cartésiennes dans $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$:

$$A_1(1, \sqrt{3}) \text{ et } A_2(1, -\sqrt{3}).$$

Une équation de la tangente à C en A_1 (qui est aussi tangente à C') est donnée par $\overrightarrow{\Omega A_1} \cdot \overrightarrow{A_1 M} = 0$, soit :

$$(X-1) + \sqrt{3}(Y-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow X + \sqrt{3}Y = 4.$$

On procède de même pour obtenir une équation de la tangente à C en A_2 , ce qui donne :

$$X - \sqrt{3}Y = 4.$$

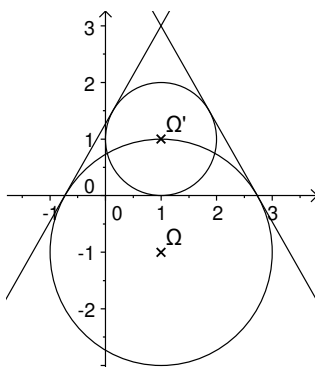
Avec les formules de changement de repère obtenues plus haut, on obtient des équations dans (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$y - \sqrt{3}x = 3 - \sqrt{3} \text{ et } y + \sqrt{3}x = 3 + \sqrt{3}.$$

Finalement :

C et C' admettent deux tangentes communes d'équations $y - \sqrt{3}x = 3 - \sqrt{3}$ et $y + \sqrt{3}x = 3 + \sqrt{3}$.

On a la figure :



Exercice 2

1) a. En prenant $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle vérifiée par f , on obtient :

$$f(0) + f(0) = 2f(0)f(0) \Leftrightarrow f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0.$$

Donc :

$$f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1$$

b. En prenant $y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x) = 2f(x)f(0)$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x)f(0).$$

Si $f(0) = 0$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ donc :

Si $f(0) = 0$, la fonction f est nulle sur \mathbb{R} tout entier.

c. Si $f(0) = 1$, alors f est la fonction nulle donc elle est paire et $f'(0) = 0$.

On suppose maintenant que $f(0) \neq 0$, soit $f(0) = 1$ d'après la première question.

- L'ensemble de définition de f est \mathbb{R} , qui est centré en 0 et en prenant $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) = 2f(y)$, soit $\forall y \in \mathbb{R}, f(-y) = f(y)$. Donc, f est paire.
- Comme f est dérivable sur \mathbb{R} , on peut dériver l'équation fonctionnelle par rapport à y (à x constant). Ceci donne $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y).$$

En prenant alors $x = y = 0$, on obtient $f'(0) - f'(0) = 2f(0)f'(0)$, soit (avec $f(0) = 1$), $f'(0) = 0$.

Finalement, quel que soit $f(0)$:

f est paire et $f'(0) = 0$.

2) Comme f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , on peut à nouveau dériver par rapport à y l'équation obtenue dans la question précédente, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

Mais, on peut aussi dériver l'équation fonctionnelle initiale deux fois par rapport à x , ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $2f''(x)f(y) = f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$

En prenant $y = 0$ dans ce résultat, on obtient, avec $a = f''(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x)f(0) = f(x)f''(0) = af(x)$.

- Si $f(0) = 0$, f est nulle, donc clairement solution de $y'' - ay = 0$.
- Si $f(0) = 1$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - af(x) = 0$ donc f est solution de $y'' - ay = 0$.

Finalement, dans les deux cas :

f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - ay = 0$.

3) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique associée est $r^2 - a = 0$ dont les racines dépendent du signe de a .

1^{er} cas : $a > 0$.

L'équation caractéristique admet deux racines réelles $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-\sqrt{a}x} + \mu e^{\sqrt{a}x}$ avec λ et μ constantes réelles.

2^{ème} cas : $a = 0$.

L'équation (E) se réécrit $y'' = 0$ et ses solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x + \mu$ avec λ et μ constantes réelles.

3^{ème} cas : $a < 0$.

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$ donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{-a}x) + \mu \sin(\sqrt{-a}x)$ avec λ et μ constantes réelles.

Finalement :

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

- $x \mapsto \lambda e^{-\sqrt{a}x} + \mu e^{\sqrt{a}x}$ si $a > 0$
- $x \mapsto \lambda x + \mu$ si $a = 0$
- $x \mapsto \lambda \cos(\sqrt{-a}x) + \mu \sin(\sqrt{-a}x)$ si $a < 0$

avec λ et μ constantes réelles.

4) On a vu que si f n'est pas la fonction nulle, alors $f(0) = 1$ et dans tous les cas, $f'(0) = 0$. Donc, en reprenant les trois cas ci-dessus :

1^{er} cas : $a > 0$. On a :

- $f(x) = \lambda e^{-\sqrt{ax}} + \mu e^{\sqrt{ax}} \Rightarrow f(0) = \lambda + \mu = 1$.
- $f'(x) = -\sqrt{a}\lambda e^{-\sqrt{ax}} + \sqrt{a}\mu e^{\sqrt{ax}} \Rightarrow f'(0) = -\sqrt{a}\lambda + \sqrt{a}\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.

On a donc $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda = \mu$ donc $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{ax}} + \frac{1}{2}e^{\sqrt{ax}} = \text{ch}(\sqrt{ax})$.

2^{ème} cas : $a = 0$. On a :

- $f(x) = \lambda x + \mu \Rightarrow f(0) = \mu = 1$.
- $f'(x) = \lambda \Rightarrow f'(0) = \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$.

On a donc $f(x) = 1$.

3^{ème} cas : $a < 0$. On a :

- $f(x) = \lambda \cos(\sqrt{-ax}) + \mu \sin(\sqrt{-ax}) \Rightarrow f(0) = \lambda = 1$.
- $f'(x) = -\sqrt{-a}\lambda \sin(\sqrt{-ax}) + \mu \sqrt{-a} \cos(\sqrt{-ax}) \Rightarrow f'(0) = \mu \sqrt{-a} = 0 \Rightarrow \mu = 0$.

On a donc $f(x) = \cos(\sqrt{-ax})$.

Toutes les fonctions trouvées sont bien deux fois dérivables sur \mathbb{R} et finalement, si on pose $\omega = \sqrt{a}$ ou $\sqrt{-a}$ suivant le signe de a :

Les fonctions f vérifiant les hypothèses sont les fonctions :
 $x \mapsto 0$, $x \mapsto 1$, $x \mapsto \text{ch}(\omega x)$ et $x \mapsto \cos(\omega x)$.

Exercice 3

1) Sur $] -1; 1[$ et sur $] 1; +\infty[$, $1 - x^2 \neq 0$, donc l'équation (E) se réécrit $y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

ESSM : $y' - \frac{x}{1-x^2}y = 0$. Les solutions sont de la forme $x \mapsto k \exp\left(\int^x \frac{t}{1-t^2} dt\right)$.

Et sur $] -1; 1[$ ou sur $] 1; +\infty[$:

$$\int^x \frac{t}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int^x \frac{-2t}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln|1-x^2| = -\ln\sqrt{|1-x^2|} \text{ et } \exp\left(-\ln\sqrt{|1-x^2|}\right) = \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

Donc les solutions de l'ESSM sont les fonctions $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|1-x^2|}}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Solutions particulières : Par la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière y_p

sous la forme $x \mapsto \frac{k(x)}{\sqrt{|1-x^2|}}$ avec k fonction dérivable sur $] -1; 1[$ ou sur $] 1; +\infty[$.

On a alors $y_p'(x) = \frac{k'(x)}{\sqrt{|1-x^2|}} + \frac{xk(x)}{(1-x^2)\sqrt{|1-x^2|}}$ et en remplaçant dans l'équation (E), on obtient :

$$\frac{k'(x)}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow k'(x) = \frac{\sqrt{|1-x^2|}}{1-x^2}.$$

Alors :

- Sur $] -1; 1[$, on a $k'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on prend alors $k(x) = \arcsin x$.
- Sur $] 1; +\infty[$, on a $k'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ et on prend alors $k(x) = -\operatorname{argch} x$.

Finalement :

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

- $x \mapsto \frac{\arcsin x + k}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $] -1; 1[$
- $x \mapsto \frac{-\operatorname{argch} x + k}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $] 1; +\infty[$

avec $k \in \mathbb{R}$.

2) Sur $] -1; 1[$, le problème de Cauchy formé par l'équation $y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$ et la condition initiale $f(0) = 0$ admet une unique solution f de la forme $x \mapsto \frac{\arcsin x + k}{\sqrt{1-x^2}}$.

La condition $f(0) = 0$ donne $f(0) = \arcsin 0 + k = k = 0$, donc :

Sur $] -1; 1[$, (E) admet une unique solution f s'annulant en 0 telle que $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) La fonction \arcsin est définie et continue sur $[-1; 1]$, à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

Remarquons que $] -1; 1[$ est centré en 0. Les fonctions \arcsin et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ étant respectivement impaire et paire sur $] -1; 1[$, f est impaire donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty.$$

4) La fonction φ est définie et dérivable sur $[0; 1[$ en tant que somme de telles fonctions et :

$$\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Sur $[0; 1[$, on a $\varphi'(x) = \arcsin x \geq 0$ (ne s'annulant qu'en 0) donc :

φ est strictement croissante sur $[0; 1[$.

5) La fonction f étant solution de (E) sur $] -1; 1[$, elle est dérivable sur cet intervalle et on a :

$$f'(x) = \frac{x}{1-x^2}f(x) + \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Sur $] -1; 1[$, on a $(1-x^2)\sqrt{1-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

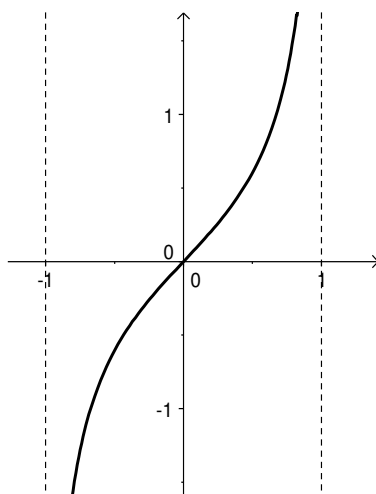
Sur $[0; 1[$, $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} = \varphi(x)$. Or, on a vu que φ est croissante sur $[0; 1[$ et comme $\varphi(0) = 1 > 0$, φ est strictement positive sur $[0; 1[$. Ceci prouve que $f'(x) > 0$ sur $[0; 1[$, donc f est strictement croissante sur $[0; 1[$.

On a vu que f est impaire, donc elle est aussi strictement croissante sur $] -1; 0]$.

Avec les limites trouvées dans la question 3, on peut construire le tableau de variations de f :

x	-1	1
f		

Et on obtient la courbe :



$$6) \text{ On a } f(\sin \theta) = \frac{\arcsin(\sin \theta)}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \frac{\arcsin(\sin \theta)}{\sqrt{\cos^2 \theta}} = \frac{\arcsin(\sin \theta)}{|\cos \theta|}.$$

- Si $\theta \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin \theta) = \arcsin(-\sin(\theta + \pi)) = -\arcsin(\sin(\theta + \pi)) = -(\theta + \pi)$ car $\theta + \pi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{et } \cos \theta < 0 \text{ donc } |\cos \theta| = -\cos \theta \text{ et ainsi, } f(\sin \theta) = \frac{\theta + \pi}{\cos \theta}.$$

- Si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ et $\cos \theta > 0$ donc $f(\sin \theta) = \frac{\theta}{\cos \theta}$.

- Si $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\arcsin(\sin \theta) = \arcsin(-\sin(\theta - \pi)) = -\arcsin(\sin(\theta - \pi)) = -(\theta - \pi)$ car $\theta - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

$$\text{et } \cos \theta < 0 \text{ donc } |\cos \theta| = -\cos \theta \text{ et ainsi, } f(\sin \theta) = \frac{\theta - \pi}{\cos \theta}.$$

Finalement :

$$f(\sin \theta) = \begin{cases} \frac{\theta + \pi}{\cos \theta} & \text{si } \theta \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{\theta}{\cos \theta} & \text{si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{\theta - \pi}{\cos \theta} & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$$

7) $\forall x \in]1; +\infty[$, posons $t = \operatorname{argch} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ch} t$. Quand x tend vers 1^+ , t tend vers 0^+ (car la fonction argch est continue en 1 et $\operatorname{argch} 1 = 0$). On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\operatorname{sh} t}.$$

Or, $\operatorname{sh} 0 = 0$ et la fonction sh est dérivable en 0 donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} 0}{t - 0} = \operatorname{sh}' 0 = \operatorname{ch} 0 = 1$. En passant à

l'inverse, on obtient $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\operatorname{sh} t} = \frac{1}{1} = 1$ et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1}$$

8) Si g est une solution de (E) continue sur $]1; +\infty[$, alors la restriction de g à $]1; +\infty[$ est solution de (E) sur cet intervalle. Or, on a vu que toute solution de (E) sur $]1; +\infty[$ est de la forme $x \mapsto -\frac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{k}{\sqrt{x^2 - 1}}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Pour que g soit continue en 1, il faut que $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$ avec $g(1)$ réel fini.

On a vu que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$. Mais, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$ donc si k n'est pas nul, la limite de g en 1^+ est infinie.

Ceci prouve que si g est continue en 1, on a forcément $k = 0$.

Enfin, dans ce cas, on a $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La seule solution de (E) continue sur }]1; +\infty[\text{ serait la fonction } g : x \mapsto \begin{cases} -\frac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}}$$

Par définition, une solution de (E) sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I . Donc, pour que g soit réellement solution de (E) sur $]1; +\infty[$, il faut qu'elle soit dérivable sur $]1; +\infty[$, et en particulier en 1.

Or, on vient de montrer que g est continue en 1 mais pas forcément dérivable en 1. Si elle l'est, alors elle est solution de (E) sur $]1; +\infty[$ (et c'est la seule) ; si elle ne l'est pas, alors (E) n'admet pas de solution sur $]1; +\infty[$. D'où le conditionnel « serait » dans la formulation de la question.