

Corrigés des TD du Chapitre 4

Exercice 1

a) $y' + 2y = t$.

Solutions de l'ESSM : $t \mapsto ke^{-2t}$ avec k réel.

Variation de la constante : On pose $y(t) = k(t)e^{-2t}$ avec k dérivable sur \mathbb{R} . Alors :

$$y'(t) + 2y(t) = k'(t)e^{-2t} = t \Rightarrow k(t) = \int^t u e^{2u} du.$$

Et en intégrant par parties, on obtient $k(t) = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}$ donc une solution particulière est $t \mapsto \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$.

Solutions générales :

$$t \mapsto \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + ke^{-2t} \text{ avec } k \text{ réel.}$$

b) $y' + e^t y = e^t$ avec $y(0) = 1$.

Solutions de l'ESSM : $t \mapsto k \exp(-\int^t e^u du) = k \exp(-e^t)$ avec k réel.

Solution particulière : Une solution particulière évidente est $t \mapsto 1$.

Ainsi, la solution recherchée f est de la forme $t \mapsto 1 + k \exp(-e^t)$ avec k constante réelle.

Et $f(0) = 1 + \frac{k}{e} = 0$ donc $k = -e$. Ainsi :

$$\text{La solution recherchée est } t \mapsto 1 - \exp(1 - e^t).$$

c) $(1+t^2)y' + 2ty = t^2$.

Comme $1+t^2 \neq 0$ sur \mathbb{R} , l'équation se réécrit $y' + \frac{2t}{1+t^2}y = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Solutions de l'ESSM : $t \mapsto k \exp(-\int^t \frac{2u}{1+u^2} du) = k \exp(-\ln(1+t^2)) = \frac{k}{1+t^2}$ avec k réel.

Variation de la constante : On pose $y(t) = \frac{k(t)}{1+t^2}$ avec k dérivable sur \mathbb{R} . Alors :

$$y'(t) + \frac{2t}{1+t^2}y(t) = \frac{k'(t)}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow k(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

Donc une solution particulière est $t \mapsto \frac{1}{3} \frac{t^3}{1+t^2}$.

Solutions générales :

$$t \mapsto \frac{1}{3} \frac{t^3}{1+t^2} + \frac{k}{1+t^2} \text{ avec } k \text{ réel.}$$

d) $y' + y = \sin t + 3 \sin(2t)$.

Solutions de l'ESSM : $t \mapsto ke^{-t}$ avec k réel.

Variation de la constante : On pose $y(t) = k(t)e^{-t}$ avec k dérivable sur \mathbb{R} . Alors :

$$y'(t) + y(t) = k'(t)e^{-t} = \sin t + 3 \sin(2t) \Rightarrow k(t) = \int^t (\sin u + 3 \sin(2u))e^u du.$$

Et en intégrant deux fois par parties, on obtient :

$$\int^t e^u \sin u du = e^t \sin t - \int^t e^u \cos u du = e^t \sin t - e^t \cos t - \int^t e^u \sin u du \Rightarrow \int^t e^u \sin u du = \frac{\sin t - \cos t}{2} e^t.$$

Et de même, $\int^t e^u \sin(2u) du = \frac{\sin(2t) - 2 \cos(2t)}{5} e^t$

Donc une solution particulière est $t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2} + 3 \frac{\sin(2t) - 2 \cos(2t)}{5}$.

Solutions générales :

$$t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2} + 3 \frac{\sin(2t) - 2 \cos(2t)}{5} + ke^{-t} \text{ avec } k \text{ réel.}$$

e) $(\operatorname{ch} t)y' + (\operatorname{sh} t)y = \frac{1}{1+t^2}$.

Comme $\operatorname{ch} t \neq 0$ sur \mathbb{R} , l'équation se réécrit $y' + (\operatorname{th} t)y = \frac{1}{(1+t^2)\operatorname{ch} t}$.

Solutions de l'ESSM : $t \mapsto k \exp(-\int^t \operatorname{th} u du) = k \exp(-\int^t \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} du) = \frac{k}{\operatorname{ch} t}$ avec k réel.

Variation de la constante : On pose $y(t) = \frac{k(t)}{\operatorname{ch} t}$ avec k dérivable sur \mathbb{R} . Alors :

$$y'(t) + (\operatorname{th} t)y(t) = \frac{k'(t)}{\operatorname{ch} t} = \frac{1}{(1+t^2)\operatorname{ch} t} \Rightarrow k(t) = \arctan t.$$

Donc une solution particulière est $t \mapsto \frac{\arctan t}{\operatorname{ch} t}$.

Solutions générales :

$$t \mapsto \frac{\arctan t + k}{\operatorname{ch} t} \text{ avec } k \text{ réel.}$$

f) $(1+t^2)y' - \arctan(t)y = 0$.

Comme $1+t^2 \neq 0$ sur \mathbb{R} , l'équation se réécrit $y' - \frac{\arctan(t)}{1+t^2}y = 0$.

Solutions : $t \mapsto k \exp(\int^t \frac{\arctan u}{1+u^2} du)$ soit :

$$t \mapsto k \exp\left(\frac{1}{2} \arctan^2 t\right) \text{ avec } k \text{ réel.}$$

g) $(1+e^t)y' + (1-e^t)y = 2+e^t$ avec $y(0) = 2$.

Comme $1+e^t \neq 0$ sur \mathbb{R} , l'équation se réécrit $y' + \frac{1-e^t}{1+e^t}y = \frac{2+e^t}{1+e^t}$.

Solutions de l'ESSM :

$$t \mapsto k \exp\left(-\int^t \frac{1-e^u}{1+e^u} du\right) = k \exp\left(\int^t \left(1+2\frac{-e^{-u}}{1+e^{-u}}\right) du\right) = k \exp(t+2\ln(1+e^{-t})) = k e^{-t}(1+e^t)^2$$

avec k réel.

Variation de la constante : On pose $y(t) = k(t)e^{-t}(1+e^t)^2$ avec k dérivable sur \mathbb{R} . Alors :

$$k'(t) = e^t \frac{2+e^t}{(1+e^t)^3} = e^t h'(e^t) \quad \text{avec} \quad h'(x) = \frac{2+x}{(1+x)^3} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3}.$$

Alors $h(x) = -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{2x+3}{2(1+x)^2}$ donc $k(t) = -\frac{2e^t+3}{2(1+e^t)^2}$.

Donc une solution particulière est $t \mapsto -\frac{1}{2}(2+3e^{-t})$.

Solutions générales : $t \mapsto -\frac{1}{2}(2+3e^{-t}) + k e^{-t}(1+e^t)^2$ avec k réel.

Si $y(0) = 2$, on a $-\frac{5}{2} + 4k = 2$ donc $k = \frac{9}{8}$ et $y(t) = -\frac{1}{2}(2+3e^{-t}) + \frac{9}{8}e^{-t}(1+e^t)^2 = \frac{9e^{-t}+10-3e^t}{8}$

La solution recherchée est $t \mapsto \frac{9e^{-t}-3e^t+10}{8}$.

h) $ty' + y = t$.

Ici, il faut chercher des solutions sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* .

Sur l'un ou l'autre de ces intervalles, l'équation devient $y' + \frac{1}{t}y = 1$.

Solutions de l'ESSM : $t \mapsto \frac{k}{|t|}$ sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* . Mais, quitte à changer k en $-k$, on peut prendre $t \mapsto \frac{k}{t}$.

Variation de la constante : On pose $y(t) = \frac{k(t)}{t}$ avec k dérivable sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* . Alors, on obtient $k'(t) = t^2$, donc une solution particulière est $t \mapsto t$.

Solutions générales :

$t \mapsto t + \frac{k}{t}$ sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* , avec k réel.

Solution maximale : La seule possibilité pour pouvoir « recoller » en 0 est de prendre $k = 0$, donc :

La solution maximale sur \mathbb{R} est $t \mapsto t$.

i) $y'' + y = 4t^2e^t$.

Solutions de l'ESSM : Equation caractéristique associée $r^2+1=0$ de racines $-i$ et i .

Les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t$ avec λ et μ réels.

Solution particulière : On cherche une solution particulière de la forme $y(t) = (at^2 + bt + c)e^t$. On a alors :

$$y''(t) + y(t) = (2at^2 + 2bt + 4at + 2b + 2c + 2a)e^t = 4t^2e^t.$$

Soit, par identification :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Une solution particulière est donc $t \mapsto (2t^2 - 4t + 2)e^t = 2(t-1)^2e^t$.

Solutions générales :

$$t \mapsto \lambda \cos t + \mu \sin t + 2(t-1)^2e^t \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

j) $y'' + 2y' + 2y = e^{-t} \cos t$.

Solutions de l'ESSM : Equation caractéristique associée $r^2 + 2r + 2 = 0$ de racines $-1 \pm i$.

Les solutions sont de la forme $t \mapsto (\lambda \cos t + \mu \sin t)e^{-t}$ avec λ et μ réels.

Solution particulière : On a $e^{-t} \cos t = \operatorname{Re}(e^{(-1+i)t})$.

On cherche alors une solution particulière de $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)t}$ sous la forme $y(t) = (at + b)e^{(-1+i)t}$.

Alors :

$$[-2i(at + b) + 2a(-1 + i)]e^{(-1+i)t} + 2[(-1 + i)(at + b) + a]e^{(-1+i)t} + 2(at + b)e^{(-1+i)t} = e^{(-1+i)t}.$$

Par identification, on trouve $a = -\frac{1}{2}i$ et b quelconque.

Une solution particulière de $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)t}$ est donc $t \mapsto -\frac{1}{2}it e^{(-1+i)t}$ et une solution particulière de

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t} \cos t \text{ est } t \mapsto \operatorname{Re}\left[-\frac{1}{2}it e^{(-1+i)t}\right] = \frac{1}{2}t e^{-t} \sin t.$$

Solutions générales :

$$t \mapsto (\lambda \cos t + \mu \sin t)e^{-t} + \frac{1}{2}t e^{-t} \sin t \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

k) $y'' - 4y' + 3y = te^t + \cos t$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

Solutions de l'ESSM : Equation caractéristique associée $r^2 - 4r + 3 = 0$ de racines 1 et 3.

Les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{3t}$ avec λ et μ réels.

Solution particulière : Utilisons le principe de superposition.

- On cherche alors une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = te^t$ sous la forme $y_1(t) = (at^2 + bt + c)e^t$.

$$\text{On obtient } y_1(t) = -\frac{1}{4}(t^2 + t)e^t.$$

- On cherche alors une solution particulière de $y'' - 4y' + 3y = \cos t$ sous la forme $y_2(t) = a \cos t + b \sin t$.

$$\text{On obtient } y_2(t) = \frac{1}{10}(\cos t - 2 \sin t).$$

Solutions générales : Elles sont de la forme $y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} + y_1(t) + y_2(t)$ soit :

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} - \frac{1}{4}(t^2 + t)e^t + \frac{1}{10}(\cos t - 2 \sin t) \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

On veut $y(0) = y'(0) = 0$, soit :

$$\begin{cases} y(0) = \lambda + \mu + \frac{1}{10} = 0 \\ y'(0) = \lambda + 3\mu - \frac{9}{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{7}{20} \\ \mu = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

La solution recherchée est donc :

$$t \mapsto \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}(t^2 + t - \frac{7}{5})e^t + \frac{1}{10}(\cos t - 2 \sin t)$$

l) $y'' - y = 2 \cos^2 t$.

Solutions de l'ESSM : Equation caractéristique associée $r^2 - 1 = 0$ de racines -1 et 1 .

Les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$ avec λ et μ réels.

Solution particulière : On a $2 \cos^2 t = 1 + \cos(2t)$. Utilisons le principe de superposition.

- Une solution particulière de $y'' - y = 1$ est $y_1(t) = -1$.
- On cherche alors une solution particulière de $y'' - y = \cos(2t)$ sous la forme $y_2(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$.

$$\text{On obtient } y_2(t) = -\frac{1}{5} \cos(2t).$$

Solutions générales : Elles sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} + y_1(t) + y_2(t)$ soit :

$$t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} - 1 - \frac{1}{5} \cos(2t) \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

Exercice 2

a) $y' = e^{y+t}$. On a :

$$y' = e^{y+t} \Leftrightarrow y' e^{-y} = e^t \Leftrightarrow (e^{-y})' = -e^t \Leftrightarrow e^{-y} = k - e^t.$$

Pour que cette égalité ait du sens, il faut au moins que $k > 0$. On peut alors poser $k = e^\alpha$ avec α réel.

On obtient $y = -\ln(e^\alpha - e^t)$ qui est défini sur $] -\infty ; \alpha[$.

Les solutions maximales sont $t \mapsto -\ln(e^\alpha - e^t)$, définies sur $] -\infty ; \alpha[$ avec α réel.

$$b) \quad t^2 y'' + ty' - 9y = 6t^3.$$

Si on pose $t = e^u$, on a $y(t) = y(e^u) = z(u)$ et, en dérivant par rapport à u , on obtient :

$$z'(u) = e^u y'(e^u) \quad \text{et} \quad z''(u) = e^u y'(e^u) + e^{2u} y''(e^u).$$

Alors, $t^2 y''(t) + ty'(t) - 9y(t) = e^{2u} y''(e^u) + e^u y'(e^u) - 9y(e^u) = z''(u) - 9z(u)$ et on peut transformer l'équation en :

$$z'' - 9z = 6e^{3u}.$$

Les solutions de l'ESSM sont de la forme $u \mapsto \lambda e^{3u} + \mu e^{-3u}$ avec λ et μ réels.

On cherche une solution particulière de la forme $u \mapsto (au + b)e^{3u}$ et on obtient $u \mapsto u e^{3u}$.

Donc :

$$z(u) = (u + \lambda)e^{3u} + \mu e^{-3u}.$$

Et avec $t = e^u$, on obtient finalement les solutions de l'équation sur \mathbb{R}_+^* :

$$y(t) = (\lambda + \ln t)t^3 + \frac{\mu}{t^3} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

$$c) \quad ty'' - y' - t^3 y = 0.$$

En posant $z(t) = y(\sqrt{t})$, z est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$z'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} y'(\sqrt{t}) \quad \text{et} \quad z''(t) = -\frac{1}{4t\sqrt{t}} y'(\sqrt{t}) + \frac{1}{4t} y''(\sqrt{t}).$$

Soit $y'(\sqrt{t}) = 2\sqrt{t} z'(t)$ et $y''(\sqrt{t}) = 4t z''(t) + 2z'(t)$

En remplaçant t par \sqrt{t} dans l'équation initiale, on obtient $\sqrt{t} y''(\sqrt{t}) - y'(\sqrt{t}) - \sqrt{t}^3 y(\sqrt{t}) = 0$, soit :

$$z''(t) - \frac{1}{4} z(t) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $z(t) = \lambda e^{\frac{t}{2}} + \mu e^{-\frac{t}{2}}$ donc les solutions de l'équation initiale sont :

$$t \mapsto \lambda e^{\frac{t^2}{2}} + \mu e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

$$d) \quad \begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 2y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 6y(t) \end{cases}.$$

Posons $z(t) = ax(t) + by(t)$ avec a et b réels que l'on choisira plus tard.

La fonction z est dérivable et :

$$z'(t) = ax'(t) + by'(t) = a[5x(t) - 2y(t)] + b[-x(t) + 6y(t)] = (5a - b)x(t) + (-2a + 6b)y(t).$$

L'idée est alors d'essayer de choisir a et b tels que $5a - b = \lambda a$ et $-2a + 6b = \lambda b$. En supposant a et b non nuls, cela implique que :

$$\frac{5a - b}{a} = \frac{-2a + 6b}{b} \Leftrightarrow 5 - \frac{b}{a} = 6 - 2\frac{a}{b} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} - 2 = 0.$$

Si on choisit $\frac{b}{a} = 1$ ou $\frac{b}{a} = -2$, cela fonctionne.

- Prenons $a = b = 1$. On a alors $z_1'(t) = 4z_1(t)$ donc $z_1(t) = x(t) + y(t) = k_1 e^{4t}$ avec k_1 réel.
- Prenons $a = 1$ et $b = -2$. On a alors $z_2'(t) = 7z_2(t)$ donc $z_2(t) = x(t) - 2y(t) = k_2 e^{7t}$ avec k_2 réel.

Alors :

- $z_2(t) - z_1(t) = -3y(t) = k_2 e^{7t} - k_1 e^{4t}$ donc $y(t) = \frac{1}{3} k_1 e^{4t} - \frac{1}{3} k_2 e^{7t}$:
- $x(t) = k_1 e^{4t} - y(t) = \frac{2}{3} k_1 e^{4t} + \frac{1}{3} k_2 e^{7t}$.

Finalement, en posant $\lambda = \frac{1}{3} k_1$ et $\mu = \frac{1}{3} k_2$, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda e^{4t} + \mu e^{7t} \\ y(t) = \lambda e^{4t} - \mu e^{7t} \end{cases} \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels.}$$

e) $y''' - y = 0$.

En s'inspirant de la technique pour le second ordre, on pose l'équation caractéristique $r^3 - 1 = 0$ donc les racines complexes sont les racines 3^{èmes} de l'unité : $1, j = e^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions sont alors de la forme :

$$t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \gamma e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \text{ avec } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ réels.}$$

Exercice 3

Les solutions de l'équation homogène associées à (E) sont de la forme $t \mapsto ke^{-t}$ avec k réel.

En posant $y(t) = k(t)e^{-t}$ avec k dérivable sur \mathbb{R} , et en remplaçant dans (E), on obtient $k'(t) = g(t)e^t$ donc, on peut poser $k(t) = \int_0^t g(u)e^u du$ et une solution particulière de (E) est $t \mapsto e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme $t \mapsto ke^{-t} + e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du$ avec k réel.

On veut montrer que toute solution de (E) admet 0 pour limite en $+\infty$.

Comme quel que soit le réel k , $\lim_{t \rightarrow +\infty} ke^{-t} = 0$, il suffit de prouver que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } A > 0 \text{ tel que } \forall t > A, \left| e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du \right| < \varepsilon.$$

Or, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall u > A, |g(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall t > A$:

$$\left| e^{-t} \int_0^t g(u)e^u du \right| = e^{-t} \left| \int_0^A g(u)e^u du + \int_A^t g(u)e^u du \right| \leq e^{-t} \left| \int_0^A g(u)e^u du \right| + e^{-t} \left| \int_A^t g(u)e^u du \right|.$$

Et $\left| \int_A^t g(u) e^u du \right| \leq \int_A^t |g(u)| e^u du$ donc :

$$\left| e^{-t} \int_0^t g(u) e^u du \right| \leq e^{-t} \left| \int_0^A g(u) e^u du \right| + e^{-t} \int_A^t |g(u)| e^u du \leq e^{-t} \left| \int_0^A g(u) e^u du \right| + e^{-t} \int_A^t \frac{\varepsilon}{2} e^u du.$$

Alors, $\forall t > A$:

$$\left| e^{-t} \int_0^t g(u) e^u du \right| \leq e^{-t} \left| \int_0^A g(u) e^u du \right| + \frac{\varepsilon}{2} e^{-t} \int_A^t e^u du = e^{-t} \left| \int_0^A g(u) e^u du \right| + \frac{\varepsilon}{2} e^{-t} [e^t - e^{-A}] = Ke^{-t} + \frac{\varepsilon}{2}$$

avec $K = \left| \int_0^A g(u) e^u du \right| - \frac{\varepsilon}{2} e^{-A}$.

Et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} Ke^{-t} = 0$, il existe $A' > 0$ tel que $\forall t > A'$, $Ke^{-t} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, en posant $B = \max(A, A')$, on a $\forall t > B$, $\left| e^{-t} \int_0^t g(u) e^u du \right| < \varepsilon$, soit $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \int_0^t g(u) e^u du = 0$.

Ainsi, pour toute solution f de (E), on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

Exercice 4

Il est clair que la fonction nulle est solution de l'équation.

Comme toute solution de l'équation est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , elle est continue sur \mathbb{R} .

Soit y une solution non nulle de (E) sur \mathbb{R} . Il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(x_0) \neq 0$. Comme y est continue, il existe un intervalle ouvert contenant x_0 sur lequel y ne s'annule pas. Soit alors un tel intervalle $I =]a; b[$, le plus grand possible, c'est-à-dire tel que :

- $a = -\infty$ ou a est fini, et dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = 0$.
- $b = +\infty$ ou b est fini, et dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = 0$.

On veut prouver que $I = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que a et b ne sont pas finis.

Posons alors $g = \frac{y'}{y}$ sur I . La fonction g est définie et dérivable sur I (en tant que quotient de fonctions dérivables) et $g' = \frac{y''y - (y')^2}{y^2} = 0$. Alors, g est constante sur I : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{y'}{y} = c \Leftrightarrow y' - cy = 0$.

Ainsi, sur I , on a $y(x) = ke^{cx}$ avec k réel non nul. Mais alors :

- si a est fini, on a $\lim_{x \rightarrow a^+} y(x) = ke^{ca} \neq 0$, ce qui est absurde donc $a = -\infty$.
- si b est fini, on a $\lim_{x \rightarrow b^-} y(x) = ke^{cb} \neq 0$, ce qui est absurde donc $b = +\infty$.

Finalement, $I = \mathbb{R}$ et ainsi, toute solution non nulle ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

En reprenant le raisonnement ci-dessus sur \mathbb{R} et non sur I , on montre que si y est une solution non nulle de (E) sur \mathbb{R} , alors elle est de la forme $x \mapsto ke^{cx}$ avec k et c constantes. Réciproquement, on vérifie aisément que les fonctions de cette forme sont solutions de l'équation et ainsi :

Les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{cx}$ avec k et c réels.

Exercice 5

Posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Comme f et g sont continues, F et G sont dérivables.

Or, $g(x) = F(x) - x$ et $f(x) = G(x) - x + 1$ donc f et g sont dérivables aussi et F et G sont deux fois dérivables.

Les deux équations se réécrivent :

$$F(x) = x + G'(x) \text{ et } G(x) = x + F'(x) - 1.$$

En dérivant la seconde et en remplaçant dans la première, on obtient $F(x) = x + 1 + F''(x)$.

Ainsi, F est solution de (E) : $y'' - y = -x - 1$.

Les solutions de l'ESSM associée à (E) sont de la forme $x \mapsto ae^x + be^{-x}$ et $x \mapsto x + 1$ est une solution particulière évidente donc $F(x) = x + 1 + ae^x + be^{-x}$ avec a et b réels.

Cependant :

- $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, on a $F(0) = 1 + a + b = 0$.
- $G(0) = 0 = 0 + F'(0) - 1$ donc $F'(0) = 1 + a - b = 1$ soit $a = b$.

Alors, $a = b = -\frac{1}{2}$ et $F(x) = x + 1 - \text{ch } x$.

Ainsi, si f et g vérifient les deux équations intégrales, on a :

$$f(x) = F'(x) = 1 - \text{sh } x \text{ et } g(x) = F(x) - x = 1 - \text{ch } x.$$

Réciproquement, si f et g sont définies comme ci-dessus, on a :

- $\int_0^x f(t)dt - x - g(x) = \int_0^x (1 - \text{sh } t)dt - x - (1 - \text{ch } x) = \text{ch } x - 1 - \int_0^x \text{sh } t dt = 0$.
- $\int_0^x g(t)dt - x - f(x) + 1 = \int_0^x (1 - \text{ch } t)dt - x - (1 - \text{sh } x) + 1 = \text{sh } x - \int_0^x \text{ch } t dt = 0$.

Donc, f et g sont bien solutions.

Ainsi :

$$f(x) = 1 - \text{sh } x \text{ et } g(x) = 1 - \text{ch } x.$$

Exercice 6

Soit y une solution de l'équation sur un intervalle I de \mathbb{R} tel que $\forall x \in I, 1 - x \in I$.

y est dérivable sur I donc $y' : x \mapsto y(1 - x)$ l'est aussi et $y''(x) = -y'(1 - x)$.

Mais, comme $x = 1 - (1 - x)$, $y'(1 - x) = y(x)$ et donc $y'' = -y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ avec a et b réels.

En réinjectant dans l'équation initiale, on obtient :

$$-a \sin x + b \cos x = a \cos(1 - x) + b \sin(1 - x) = (a \cos 1 + b \sin 1) \cos x + (a \sin 1 - b \cos 1) \sin x.$$

Et par identification :

$$\begin{cases} a = b \cos 1 - a \sin 1 \\ b = a \cos 1 + b \sin 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = a \frac{1 + \sin 1}{\cos 1}.$$

Ceci donne $y(x) = \frac{a}{\cos 1} [\cos 1 \cos x + (1 + \sin 1) \sin x]$, soit avec $k = \frac{a}{\cos 1}$:

$$y(x) = k [\cos(1-x) + \sin x].$$

Réciproquement, si $y(x) = k [\cos(1-x) + \sin x]$, y est dérivable sur \mathbb{R} et $y(x) = k [\sin(1-x) + \cos x] = y(1-x)$, donc y est solution.

Finalement, les solutions de l'équation sur \mathbb{R} sont :

$$x \mapsto k [\cos(1-x) + \sin x] \text{ avec } k \text{ réel.}$$

Exercice 7

Remarquons préalablement que, comme f est dérivable sur I , C admet une tangente non verticale en tout point et la normale correspondante n'est pas horizontale donc coupe effectivement l'axe (Ox) .

Soit a un réel de I . La pente de la tangente à C au point $M(a, f(a))$ est $f'(a)$ donc un vecteur directeur de cette tangente est $\vec{t}(1, f'(a))$. Un vecteur directeur de la normale est alors $\vec{n}(f'(a), -1)$.

Si $N(x_N, 0)$ est le point d'intersection de cette normale avec (Ox) , on a $\det(\vec{n}, \overrightarrow{NM}) = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} f'(a) & a - x_N \\ -1 & f(a) \end{vmatrix} = f'(a)f(a) + a - x_N = 0 \Leftrightarrow x_N = f'(a)f(a) + a.$$

Soit alors, J le milieu de $[MN]$. On a :

$$\text{et } y_J = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{1}{2} f(a).$$

Alors, si J appartient la parabole d'équation $y^2 = x$, on a :

$$\frac{1}{4} f(a)^2 = a + \frac{1}{2} f(a) f'(a) \Leftrightarrow f(a)^2 - 2f(a) f'(a) = 4a.$$

Donc, f doit être solution de $y^2 - 2yy' = 4x$.

Posons $z = y^2$. z est dérivable et $z' = 2yy'$ donc z vérifie $z - z' = 4x$ qui est linéaire du premier ordre.

Les solutions de l'ESSM sont $x \mapsto ke^x$ avec k réel et si on cherche une solution particulière affine, on trouve $x \mapsto 4x + 4$. Alors, on a :

$$z(x) = ke^x + 4x + 4.$$

Mais, il ne faut pas oublier que $z = y^2$ donc z doit positive sur I .

Or, si quel que soit k , $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ke^x + 4x + 4) = -\infty$, ce qui est impossible. Ainsi, z et donc f ne peuvent être définie sur \mathbb{R} tout entier.

De plus, si $k < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ke^x + 4x + 4) = -\infty$ aussi donc z ne peut être définie pour x grand.

Par contre, si $k \geq 0$, on a $z'(x) = ke^x + 4 > 0$ et z est strictement croissante donc d'après le théorème de la bijection, z s'annule une seule fois en un réel α .

On a alors $ke^\alpha + 4\alpha + 4 = 0$ donc $k = -e^{-\alpha}(4\alpha + 4)$.

Si on pose $g(t) = -4e^{-t}(t+1)$, g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(t) = 4te^{-t}$.

D'où le tableau :

t	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
g	$+\infty$		-4	0

\swarrow θ \searrow

Comme il faut que $k \geq 0$, on a $\alpha \leq -1$ et plus k est grand, plus α est négatif.

Finalement, on obtient :

$$f(x) = 2\varepsilon\sqrt{x+1-e^{x-\alpha}(\alpha+1)}$$

définie sur $]\alpha; +\infty[$ avec $\varepsilon = 1$ ou -1 .

Réciproquement, si f est définie comme ci-dessus, on a :

$$\begin{cases} x_J = a + \frac{1}{2}f(a)f'(a) = a + 1 - e^{a-\alpha}(\alpha+1) \\ y_J = \frac{1}{2}f(a) = \varepsilon\sqrt{a+1-e^{a-\alpha}(\alpha+1)} \end{cases}$$

Donc, $x_J = y_J^2$ dans les deux cas ($\varepsilon = 1$ ou -1).

Remarquons que, quand a décrit I , x_J décrit \mathbb{R}_+^* et :

- si $\varepsilon = 1$, y_J décrit \mathbb{R}_+^* donc J décrit la branche de la parabole située au dessus de l'axe des abscisses ;
- si $\varepsilon = -1$, y_J décrit \mathbb{R}_-^* donc J décrit la branche de la parabole située au dessous de l'axe des abscisses.

Donc, dans un cas comme dans l'autre, J ne décrit que la moitié de la parabole.

Exercice 8

Posons $g(x) = e^{-x}f(x)$. On a alors $f(x) = e^xg(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$e^{x+y}g(x+y) = e^xe^yg(y) + e^ye^xg(x) \Leftrightarrow g(x+y) = g(y) + g(x).$$

Comme f est dérivable en 0, g aussi. Montrons que g est dérivable sur \mathbb{R} . $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h}.$$

Or, en posant $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle vérifiée par g , on obtient $g(0) = g(0) + g(0)$, soit $g(0) = 0$ et comme g est dérivable en 0, on obtient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h-0} = g'(0).$$

Ceci prouve non seulement que g est dérivable en tout réel x , mais aussi que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g'(0)$.

En posant $g'(0) = a$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = a$, donc $g(x) = ax + b$ avec b constante. Comme $g(0) = 0$, on a $b = 0$ et ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ax$ (g est une fonction linéaire).

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = axe^x$.

Réciproquement, les fonctions de la forme $x \mapsto axe^x$ avec a réel ou complexe fixé vérifient bien l'équation fonctionnelle et ainsi :

Les fonctions recherchées sont les fonctions $x \mapsto axe^x$ avec a constante.

Exercice 9

Soit $x_0 \in I$ fixé. Posons $A(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt$.

Les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $x \mapsto ke^{-A(x)}$.

En faisant varier la constante, on obtient $k'(x) = b(x)e^{A(x)}$ donc $k(x) = k + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt$ et les solutions de (E)

sont les fonctions f de la forme $f : x \mapsto ke^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt$ avec $f(x_0) = k$ donc :

$$f(x) = f(x_0)e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)}dt.$$

On a $f'(x_0) = b(x_0) - a(x_0)f(x_0)$ donc une équation à la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est :

$$y = [b(x_0) - a(x_0)f(x_0)](x - x_0) + f(x_0).$$

Deux cas se présentent :

- Si $a(x_0) = 0$, la pente de la tangente vaut $b(x_0)$ qui est indépendante de f donc toutes les tangentes au point d'abscisse x_0 sont parallèles.
- Si $a(x_0) \neq 0$, soient f_1 et f_2 deux solutions distinctes de (E). On a alors $f_2(x_0) \neq f_1(x_0)$ du fait de l'unicité des solutions avec condition initiale.

Cherchons l'intersection des tangentes aux courbes représentatives de f_1 et f_2 au points d'abscisse x_0 .

Il faut résoudre :

$$\begin{cases} y = [b(x_0) - a(x_0)f_1(x_0)](x - x_0) + f_1(x_0) \\ y = [b(x_0) - a(x_0)f_2(x_0)](x - x_0) + f_2(x_0) \end{cases}$$

Ceci donne :

$$[b(x_0) - a(x_0)f_1(x_0)](x - x_0) + f_1(x_0) = [b(x_0) - a(x_0)f_2(x_0)](x - x_0) + f_2(x_0)$$

$$\Leftrightarrow [f_2(x_0) - f_1(x_0)]a(x_0)(x - x_0) = f_2(x_0) - f_1(x_0) \Leftrightarrow a(x_0)(x - x_0) = 1 \Leftrightarrow x = x_0 + \frac{1}{a(x_0)}$$

On a alors $y = \frac{b(x_0)}{a(x_0)}$ et le point d'intersection des deux tangentes est donc le point de coordonnées

$\left(x_0 + \frac{1}{a(x_0)}, \frac{b(x_0)}{a(x_0)}\right)$ qui est indépendant de la fonction choisie. Donc, toutes les tangentes au point

d'abscisse x_0 sont concourantes.

Finalement :

Les tangentes au point d'abscisse x_0 aux courbes représentatives des solutions de (E) sont toutes concourantes ou toutes parallèles.

Exercice 10

Nous sommes en chute libre sans vitesse initiale donc $v(0) = 0$.

Premier modèle : Avec $F(t) = kv(t)$, l'équation du mouvement devient $mv'(t) = mg - kv(t)$ soit :

$$v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = g.$$

Alors, v est solution de $y' + \frac{k}{m}y = g$ donc $v(t) = \frac{mg}{k} + Ae^{-\frac{k}{m}t}$ et comme $v(0) = 0$, on obtient :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Alors, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k}$, donc :

La vitesse limite dans le premier modèle est $v_L = \frac{mg}{k} = 75 \text{ m/s} = 270 \text{ km/h}$.

Second modèle : Avec $F(t) = Kv(t)^2$, l'équation du mouvement devient $mv'(t) = mg - Kv(t)^2$ soit :

$$v'(t) = \frac{K}{m} \left(\frac{mg}{K} - v(t)^2 \right).$$

En posant $v_0 = \sqrt{\frac{mg}{K}}$, on a $v'(t) = \frac{K}{m} (v_0^2 - v(t)^2)$.

Initialement, $v(0) = 0 < v_0$, donc il existe un intervalle de temps I , tel que sur I , $v(t) < v_0$. On peut alors écrire :

$$\frac{v'(t)}{v_0^2 - v(t)^2} = \frac{K}{m} \Leftrightarrow \frac{v'(t)}{v_0 - v(t)} + \frac{v'(t)}{v_0 + v(t)} = \frac{2v_0 K}{m}.$$

Sur I , on obtient, en intégrant :

$$-\ln(v_0 - v(t)) + \ln(v_0 + v(t)) = \ln\left(\frac{v_0 + v(t)}{v_0 - v(t)}\right) = \frac{2v_0 K}{m}t + B.$$

Avec $v(0) = 0$, on a $\ln\left(\frac{v_0}{v_0}\right) = 0 = B$ donc $\frac{v_0 + v(t)}{v_0 - v(t)} = e^{\frac{2v_0 K}{m}t}$, soit :

$$v(t) = v_0 \frac{e^{\frac{2v_0 K}{m}t} - 1}{e^{\frac{2v_0 K}{m}t} + 1}.$$

Remarquons que $\forall t > 0$, $v(t) < v_0$ donc ce modèle est valable pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_0$ donc :

La vitesse limite dans le second modèle est $v_L = \sqrt{\frac{mg}{K}} \approx 54,8 \text{ m/s} \approx 197,2 \text{ km/h}$.

Finalement, dans les deux modèles, la vitesse du corps en chute libre tend vers une vitesse limite et des deux vitesses limites trouvées, la seconde est environ 200 km/h, donc :

Brennan a raison et utilise le second modèle.

