Corrigés des TD du Chapitre 6

Exercice 1

Remarquons déjà que $\cos\theta+\sin\theta+2=0 \Leftrightarrow \cos\theta=\sin\theta=-1$. Ceci est impossible donc ρ est défini $\forall\,\theta\in\mathbb{R}$.

Par ailleurs, la fonction $\theta\mapsto\rho(\theta)$ est 2π-périodique donc la courbe est fermée (ce qui élimine paraboles et hyperboles donc on commence à flairer une forte odeur d'ellipse…)

$\forall\,\theta\in\mathbb{R}$, $\rho(\theta)>0$ et :

$$\rho=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta+2} \Leftrightarrow \rho\cos\theta+\rho\sin\theta+2\rho=1 \Leftrightarrow 2\rho=\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-1 \Leftrightarrow 4\rho^2=(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-1)^2$$

Et avec $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ et $\rho^2=x^2+y^2$, on obtient l'équation cartésienne :

$$4(x^2+y^2)=(x+y-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-2xy+2x+2y=1.$$

En posant se plaçant dans le repère $(O,\vec{u}_{\pi/4},\vec{v}_{\pi/4})$ et en appelant X et Y les coordonnées dans ce nouveau repère, on a $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{u}_{\pi/4}+Y\vec{v}_{\pi/4}$ donc $x=\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$ et $y=\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et l'équation devient :

$$2X^2+4Y^2+2\sqrt{2}X=1 \Leftrightarrow (X+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+2Y^2=1.$$

Cette dernière équation est celle d'une ellipse dont les éléments caractéristiques dans $(O,\vec{u}_{\pi/4},\vec{v}_{\pi/4})$ sont les suivants :

- Centre : $\Omega(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$;
- Grand axe : $(\Omega,\vec{u}_{\pi/4})$;
- $a=1,\ b=\frac{\sqrt{2}}{2},\ c=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Foyers : $F(\sqrt{2},0)$ et $F'=O$.
- Directrices : $D: X=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $D': X=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

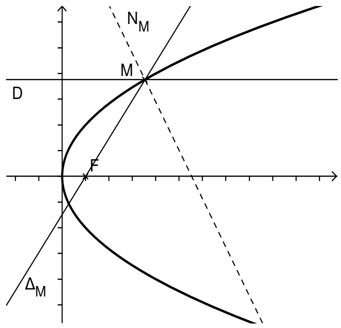
Remarque : On aurait pu remarquer que $\rho=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta-\frac{3\pi}{4})}$ qui est l'équation polaire d'un ellipse (en tournant le repère de $-\frac{3\pi}{4}$.

Exercice 2

Plaçons-nous dans une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ dans lequel *P* a pour équation $y^2=2px$.

Soit $M(x_o,y_o)$ un point de *P*. La tangente à *P* en M admet $\vec{T}(y_o,p)$ pour vecteur directeur.

Une équation de la normale N_M en M est alors $y_o(x-x_o)+p(y-y_o)=0$.



Soit Δ la droite horizontale passant par M, d'équation $y=y_o$, et Δ_M la symétrique de Δ par rapport à N_M.

Soit $N(x,y)$ un point du plan et $N'(x',y')$, son symétrique par rapport à N_M. On a :

- $\text{mil}[NN'] \in N_M$ donc $y_o(\frac{x+x'}{2}-x_o)+p(\frac{y+y'}{2}-y_o)=0$;
- $(NN') \perp N_M$ donc $\overrightarrow{NN'}.\vec{n}=-p(x'-x)+y_o(y'-y)=0$ où $\vec{n}(-p,y_o)$ est directeur de N_M.

Or, N est sur Δ_M si et seulement si N' est sur Δ, c'est-à-dire si et seulement si $y'=y_o$.

Les deux relations précédentes deviennent alors $\begin{cases} y_o(x+x')+p(y-y_o)=2x_oy_o \\ p(x'-x)-y_o(y_o-y)=0 \end{cases}$ d'où l'on tire une équation de Δ_M en éliminant x' :

$$\Delta_M : 2py_ox+(p^2-y_o^2)y=p^2y_o.$$

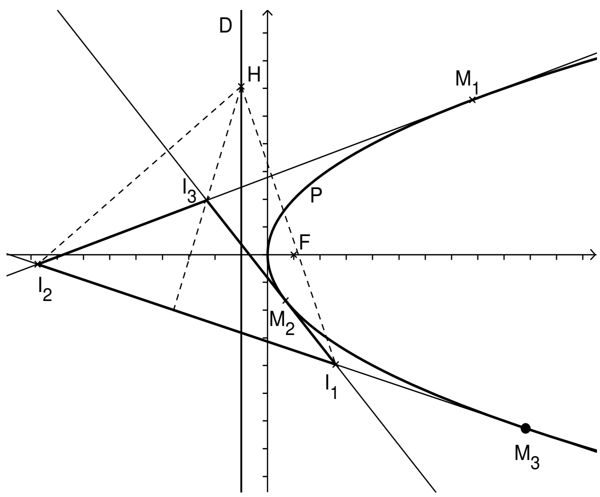
Pour montrer que les droites Δ_M passent par un point fixe, il faudrait prendre deux point M_1 et M_2 de *P* et montrer que les deux droites Δ_{M_1} et Δ_{M_2} correspondantes se coupent en un point indépendant de M_1 et M_2.

Néanmoins, on peut aller plus vite en remarquant que si l'on prend y = 0 dans l'équation de Δ_M, on obtient $x=\frac{p}{2}$ qui est indépendant de M. Le point $(\frac{p}{2},0)$ est le foyer de *P* et ainsi :

$$\boxed{\text{Toutes les droites } \Delta_M \text{ passent par le foyer.}}$$

Exercice 3

Soient $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ et $M_3(x_3,y_3)$ trois points distincts deux à deux de *P* (leurs ordonnées sont différentes deux à deux).



On appelle I_1, l'intersection des tangentes en M_2 et M_3 ; I_2, l'intersection des tangentes en M_1 et M_3 ; I_3, l'intersection des tangentes en M_1 et M_2 ; H, l'orthocentre de $I_1I_2I_3$.

Les tangentes en M_2 et M_3 ont pour équations respectives $y_2y = p(x + x_2)$ et $y_3y = p(x + x_3)$.

I_1 étant l'intersection de ces tangentes, ses coordonnées vérifient les deux équations ce qui donne :

$$y_{I_1} = \frac{px_2 - px_3}{y_2 - y_3} = \frac{1}{2}\frac{y_2{}^2 - y_3{}^2}{y_2 - y_3} = \frac{y_2 + y_3}{2}$$
$$x_{I_1} = \frac{y_3}{p} y_{I_1} - x_3 = \frac{y_2y_3 + y_3{}^2 - 2px_3}{2p} = \frac{y_2y_3}{2p}$$

Ce qui donne : $I_1(\frac{y_2y_3}{2p}, \frac{y_2 + y_3}{2})$

La hauteur de $I_1I_2I_3$ issue de I_1 est la perpendiculaire en I_1 à (I_2I_3), c'est-à-dire à la tangente en M_1 (car I_2 et I_3 sont sur cette tangente. Donc, un vecteur normal à cette hauteur est $\vec{T}_1(y_1, p)$ (directeur de la tangente).

Une équation de la hauteur issue de I_1 est alors :

$$y_1(x - \frac{y_2y_3}{2p}) + p(y - \frac{y_2 + y_3}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1x + py = \frac{y_1y_2y_3}{2p} + p\frac{y_2 + y_3}{2}.$$

De la même façon, une équation de la hauteur de $I_1I_2I_3$ issue de I_2 est :

$$y_2x + py = \frac{y_1y_2y_3}{2p} + p\frac{y_1 + y_3}{2}.$$

H est l'intersection de ces deux hauteurs donc :

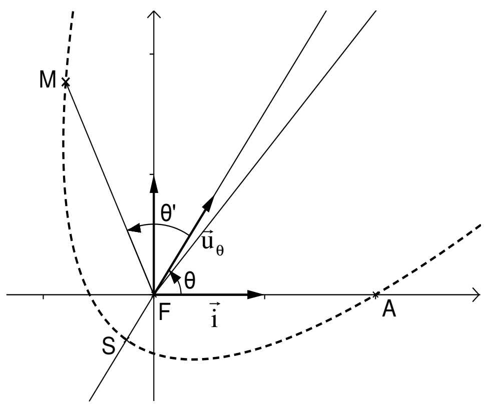
$$\begin{cases} y_1x_H + py_H = \dfrac{y_1y_2y_3}{2p} + p\dfrac{y_2 + y_3}{2} \\ y_2x_H + py_H = \dfrac{y_1y_2y_3}{2p} + p\dfrac{y_1 + y_3}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad (y_1 - y_2)x_H = p\frac{y_2 - y_1}{2}.$$

Or, $M_1 \neq M_2$ donc $y_1 \neq y_2$ et $x_H = -\frac{p}{2}$ ce qui prouve bien que :

H appartient à la directrice de *P*.

Exercice 4

Dans le repère orthonormé direct $(F, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel $A(2,0)$, soit P_θ une parabole de foyer F, passant par A et de sommet S avec $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{SF})$. Comme S, A et F ne peuvent être distincts et alignés, on a $\theta \neq 0$.



Dans le repère $(F, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$, une équation polaire de P_θ est $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\theta'}$ où $M(\rho, \theta')$ est le point de la parabole de coordonnées polaires (ρ, θ') dans $(F, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ et p est le paramètre de la parabole.

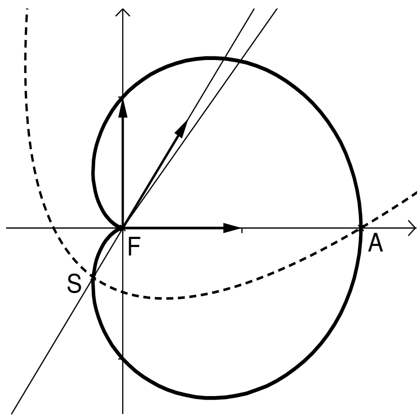
Comme le point A, de coordonnées polaires $(2, -\theta)$ dans $(F, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$, appartient à P_θ, on a :

$$2 = \frac{p}{1-\cos(-\theta)} \quad \Leftrightarrow \quad p = 2(1-\cos\theta).$$

Alors, $\overrightarrow{FS} = -\dfrac{p}{2}\vec{u}_\theta = (\cos\theta - 1)\vec{u}_\theta$ donc :

Le lieu des sommets S est la courbe d'équation polaire $\rho = \cos\theta - 1$ privée de F.

La fonction $\rho : \theta \mapsto \cos\theta - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2p-périodique et paire donc la courbe est symétrique par rapport à (Fx). On peut l'étudier sur $[0;\pi]$. Quel que soit θ, $\rho(\theta) \leq 0$ et $\rho'(\theta) = -\sin\theta \leq 0$ sur $[0;\pi]$ donc, entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, ρ décroit de 0 à – 2. On a la courbe (qui est une *cardioïde*) :



Exercice 5

D'après la définition bifocale, l'ensemble des points M du plan tels que $MA + MB = 4$ est une ellipse de foyers A et B et telle que a = 2.

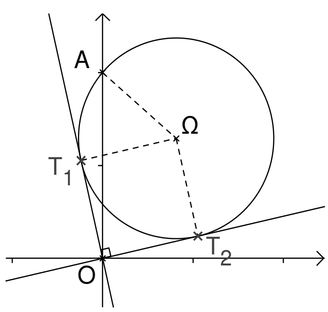
De plus, avec $A(-1;0)$ et $B(1;0)$, $AB = 2 = 2c$ donc $c = 1$ et $b^2 = a^2 - c^2 = 3$.

Une équation cartésienne de l'ellipse est donc $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Exercice 6

Soit Ω le centre d'un cercle passant par A et dont les tangentes menées en O sont perpendiculaires.

Appelons T_1 et T_2 es deux points de tangence.



Considérons le quadrilatère $OT_1\Omega T_2$.

- Les tangentes sont perpendiculaires, donc $(OT_1)\perp(OT_2)$.
- Les droites (OT_1) et (OT_2) étant tangentes au cercle de centre Ω, on a $(OT_1)\perp(\Omega T_1)$ et $(OT_2)\perp(\Omega T_2)$.

Alors, $OT_1\Omega T_2$ possède trois angles droits donc c'est un rectangle.

- A, T_1 et T_2 sont tous les trois sur le cercle de centre Ω donc $\Omega T_1=\Omega T_2=\Omega A$.

Ainsi, le rectangle $OT_1\Omega T_2$ possède deux côté consécutifs de même longueur $[\Omega T_1]$ et $[\Omega T_2]$ donc c'est un carré.

On a alors la relation entre diagonale et côté : $\Omega O=\sqrt{2}\,\Omega A$ soit $\Omega O^2=2\,\Omega A^2$.

Si $\Omega(x,y)$, on a alors :

$$x^2+y^2=2x^2+2(y-2)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2-8y+8=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+(y-4)^2=8.$$

Et ainsi, Ω appartient au cercle *C* de centre $B(0,4)$ et de rayon $\sqrt{8}$.

Réciproquement :

Si Ω est sur *C*, alors on montre facilement à l'aide des coordonnées que $\Omega O=\sqrt{2}\,\Omega A$.

Donc $\Omega O>\Omega A$ et O est à l'extérieur du cercle de centre Ω et de rayon OA. Il existe alors deux droites passant par O tangentes à ce cercle en T_1 et T_2. Et :

- $T_1\Omega O$ est rectangle en T_1 donc $\Omega O^2=T_1\Omega^2+T_1O^2$ avec $T_1\Omega^2=\Omega A^2=\dfrac{1}{2}\Omega O^2$ donc $T_1\Omega=T_1O$.
- De même, $T_2\Omega=T_2O$.

Alors, $T_2\Omega=T_2O=T_1\Omega=T_1O=\Omega A$ donc $OT_1\Omega T_2$ est un losange qui possède deux angles droits donc c'est un carré et ainsi, $(OT_1)\perp(OT_2)$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Le lieu recherché est le cercle de centre } B(0,4) \text{ et de rayon } \sqrt{8}.}$$

Exercice 7

1) On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que l'équation de la parabole soit $y^2=2px$.

Soient $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$ deux points de la parabole tels que les tangentes T_1 en M_1 et T_2 en M_2 soient perpendiculaires en leur point d'intersection T.

- Une équation de T_1 est $y_1y=px+px_1$ et un vecteur directeur est $\vec{u}_1(y_1,p)$.
- Une équation de T_2 est $y_2y=px+px_2$ et un vecteur directeur est $\vec{u}_2(y_2,p)$.

$T_1\perp T_2$ donc $\vec{u}_1.\vec{u}_2=y_1y_2+p^2=0$.

Ceci implique que $y_1\neq 0$ et en posant $y_1=t\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$x_1=\frac{t^2}{2p},\ y_2=-\frac{p^2}{t} \text{ et } x_2=\frac{p^4}{2pt^2}.$$

Les coordonnées du point $T = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ vérifient le système :

$$\begin{cases} ty_T = px_T + \dfrac{t^2}{2} \\ -\dfrac{p^2}{t} y_T = px_T + \dfrac{p^4}{2t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} px_T = ty_T - \dfrac{t^2}{2} \\ (p^2 + t^2) y_T = \dfrac{t^4 - p^4}{2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = -\dfrac{p}{2} \\ y_T = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{p^2}{t} \right) \end{cases}.$$

On a donc $x_T = -\dfrac{p}{2}$ ce qui veut dire que T est sur la directrice de la parabole.

De plus, si on pose $f(t) = t - \dfrac{p^2}{t}$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f'(t) = 1 + \dfrac{p^2}{t^2} > 0$.

Donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, f est strictement croissante de $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = -\infty$ à $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

Comme f est continue, $f(t)$ décrit $\mathbb{R}$ tout entier quand t décrit $\mathbb{R}_+^*$ et ainsi, T parcourt toute la directrice quand t décrit $\mathbb{R}^*$ (et même deux fois, avec les valeurs négatives de t).

Finalement :

L'ensemble des points du plan où passent deux tangentes perpendiculaires à une parabole est sa directrice.

2) Plaçons-nous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'ellipse soit paramétrée par $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ avec $a > b$. Soient M_1 et M_2 deux points de l'ellipse de paramètre respectif t_1 et t_2 tels que O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés, soit $\det(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = ab(\cos t_1 \sin t_2 - \sin t_1 \cos t_2) \neq 0$.

- Une équation de la tangente $\mathcal{T}_1$ à l'ellipse en M_1 est $(b\cos t_1)x + (a\sin t_1)y = ab$.
- Une équation de la tangente $\mathcal{T}_2$ e à l'ellipse en M_2 est $(b\cos t_2)x + (a\sin t_2)y = ab$.

Les coordonnées du point $T = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ vérifient le système :

$$\begin{cases} (b\cos t_1)x_T + (a\sin t_1)y_T = ab \\ (b\cos t_2)x_T + (a\sin t_2)y_T = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = a\dfrac{\sin t_2 - \sin t_1}{\cos t_1 \sin t_2 - \sin t_1 \cos t_2} \\ y_T = b\dfrac{\cos t_1 - \cos t_2}{\cos t_1 \sin t_2 - \sin t_1 \cos t_2} \end{cases}$$

Et on peut récrire :

$$\begin{cases} x_T = a\dfrac{2\cos\left(\dfrac{t_2 + t_1}{2}\right)\sin\left(\dfrac{t_2 - t_1}{2}\right)}{\sin(t_2 - t_1)} = a\dfrac{\cos\left(\dfrac{t_2 + t_1}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{t_2 - t_1}{2}\right)} \\ y_T = b\dfrac{2\sin\left(\dfrac{t_2 + t_1}{2}\right)\sin\left(\dfrac{t_2 - t_1}{2}\right)}{\sin(t_2 - t_1)} = b\dfrac{\sin\left(\dfrac{t_2 + t_1}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{t_2 - t_1}{2}\right)} \end{cases}$$

Alors :

$$OT^2 = x_T{}^2 + y_T{}^2 = \frac{a^2\cos^2\left(\frac{t_2+t_1}{2}\right) + b^2\sin^2\left(\frac{t_2+t_1}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t_2-t_1}{2}\right)} = \frac{a^2+b^2+c^2\cos(t_2+t_1)}{1+\cos(t_2-t_1)}.$$

Par ailleurs, un vecteur directeur de T_1 est $\vec{u}_1(-a\sin t_1, b\cos t_1)$ et un vecteur directeur de T_2 est $\vec{u}_2(-a\sin t_2, b\cos t_2)$.

Avec $2\sin t_1 \sin t_2 = \cos(t_1-t_2) - \cos(t_1+t_2)$ et $2\cos t_1 \cos t_2 = \cos(t_1-t_2)+\cos(t_1+t_2)$, on obtient :

$$2\,\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 2a^2 \sin t_1 \sin t_2 + 2b^2 \cos t_1 \cos t_2 = (a^2+b^2)\cos(t_1-t_2) - c^2\cos(t_1+t_2).$$

Donc :

$$OT^2 = \frac{a^2+b^2+(a^2+b^2)\cos(t_1-t_2) - 2\,\vec{u}_1.\vec{u}_2}{1+\cos(t_2-t_1)} = a^2+b^2 - \frac{2\,\vec{u}_1.\vec{u}_2}{1+\cos(t_2-t_1)}.$$

On a alors :

$$T_1 \perp T_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad OT^2 = a^2+b^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'ensemble recherché est le cercle de centre O et de rayon } \sqrt{a^2+b^2}.}$$

Exercice 8

Soient *E* une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a > b$ dans un repère orthonormé et $M_o(x_o, y_o)$ un point de *E*.

La tangente à *E* en M_o a pour équation $\frac{x_o x}{a^2}+\frac{y_o y}{b^2}=1$ donc pour vecteur normale $\vec{n}(\frac{x_o}{a^2},\frac{y_o}{b^2})$.

Une équation de la normale N_o à *E* en M_o est donc :

$$\frac{y_o}{b^2}(x-x_o) - \frac{x_o}{a^2}(y-y_o) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_o}{b^2}x - \frac{x_o}{a^2}y - \frac{c^2}{a^2b^2}x_o y_o = 0.$$

On peut alors calculer la distance du centre $O(0,0)$ de l'ellipse à N_o :

$$d = d(O, N_o) = \frac{\left|-\frac{c^2}{a^2b^2}x_o y_o\right|}{\sqrt{\frac{y_o{}^2}{b^4}+\frac{x_o{}^2}{a^4}}} = c^2\frac{|x_o y_o|}{\sqrt{a^4 y_o{}^2 + b^4 x_o{}^2}}.$$

Cette distance d est maximale si et seulement si d^2 l'est.

On veut donc maximiser la quantité $d^2 = c^4\,\dfrac{x_o{}^2 b^2(1-\frac{x_o{}^2}{a^2})}{a^4b^2(1-\frac{x_o{}^2}{a^2})+b^4x_o{}^2}$ quand $M_o(x_o, y_o)$ varie sur *E*.

Avec $\frac{x_o{}^2}{a^2}+\frac{y_o{}^2}{b^2}=1$, soit $y_o{}^2 = b^2(1-\frac{x_o{}^2}{a^2})$, on a $d^2 = \frac{c^4}{a^2}\frac{a^2x_o{}^2 - x_o{}^4}{a^4 - c^2x_o{}^2}$.

Posons $t=\frac{x_o^{\ 2}}{a^2}$. Comme x_o varie entre – a et a, t varie entre 0 et 1 et :

$$d^2=\frac{c^4}{a^2}\frac{t-t^2}{1-e^2t}=\frac{c^4}{a^2}f(t).$$

avec $e=\frac{c}{a}<1$ et $f(t)=\frac{t-t^2}{1-e^2t}$.

La fonction f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $[0;1]$ et $f'(t)=\frac{e^2t^2-2t+1}{(1-e^2t)^2}$.

Les racines du numérateur sont $\frac{1+\sqrt{1-e^2}}{e^2}=\frac{a}{a-b}>1$ et $\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2}=\frac{a}{a+b}\in[0;1]$, d'où le tableau :

t	0		$\frac{a}{a+b}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\frac{a}{a+b})$	$\searrow$	0

Ceci prouve que la distance d de O à N_o est maximale quand $t=\frac{x_o^{\ 2}}{a^2}=\frac{a}{a+b}$, soit $x_o=\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ donc en quatre points (symétriques par rapport aux axes, ce qui n'est pas étonnant vu les symétries de l'ellipse) :

$$\boxed{\left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}},b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right),\ \left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}},b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right),\ \left(a\sqrt{\frac{a}{a+b}},-b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right)\text{ et }\left(-a\sqrt{\frac{a}{a+b}},-b\sqrt{\frac{b}{a+b}}\right).}$$

La distance maximale vaut alors, avec $|x_o|=a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ et $|y_o|=b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, $d_{max}=c^2\frac{a\sqrt{\frac{a}{a+b}}b\sqrt{\frac{b}{a+b}}}{\sqrt{a^4b^2\frac{b}{a+b}+b^4a^2\frac{a}{a+b}}}$, soit, après moult simplifications :

$$\boxed{d_{max}=a-b}$$

Exercice 9

1) Remarquons déjà que $FF'=2c>2a$ donc F est à l'extérieur de *C* et tout cercle passant par F ne peut être à l'intérieur de *C*.

Un cercle Γ de centre Ω et de rayon ΩF (passant par F) est tangent à *C* (de centre F' et de rayon 2a) si et seulement si :

Γ et *C* sont tangents extérieurement $\Leftrightarrow \Omega F'=\Omega F+2a$

ou

Γ et *C* sont tangents intérieurement avec *C* à l'intérieur de Γ $\Leftrightarrow \Omega F'=\Omega F-2a$.

Ainsi :

Un cercle Γ de centre Ω passant par F est tangent à *C* si et seulement si $|\Omega F'-\Omega F|=2a$.

On retrouve la définition bifocale de l'hyperbole, donc :

H est l'ensemble des centres des cercle tangents à *C* et passent par F.

2) Une équation cartésienne de *H* dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ et la tangente à *H* en $M(x_o,y_o)$ a pour équation $\frac{x_o x}{a^2}-\frac{y_o y}{b^2}=1$. Par ailleurs, la directrice *D* associée à F est verticale, d'équation $x=\frac{a^2}{c}$.

Si M est différent de A et A', alors $y_o \neq 0$ donc la tangente n'est pas verticale et elle coupe *D* en un point T dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x_T = \dfrac{a^2}{c} \\ \dfrac{x_o x_T}{a^2}-\dfrac{y_o y_T}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad T\left(\frac{a^2}{c},\frac{b^2(x_o-c)}{cy_o}\right).$$

On a alors :

$$\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FT}=(x_o-c)\left(\frac{a^2}{c}-c\right)+\frac{b^2(x_o-c)}{cy_o}y_o=(x_o-c)\left(\frac{a^2-c^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right)=0.$$

Donc :

$$\boxed{(FM)\perp(FT)}$$

Méthode de construction de la tangente en M :

- Construire la droite Δ perpendiculaire à (FM) en F ;
- $T=\Delta\cap D$

La tangente en M est alors la droite (TM).

Exercice 10

Prenons un repère de centre le projeté orthogonale de F sur *D*, tel que *D* soit l'axe des abscisses et $F(0,1)$.

Soit alors *H* une hyperbole de centre O, admettant F pour foyer et *D* pour asymptote.

Les asymptotes d'une hyperbole passent par son centre donc O est sur *D* et $y_O=0$.

On a $x_O \neq 0$ (sinon l'asymptote serait perpendiculaire au grand axe). Posons alors $x_O=t$ avec $t\in\mathbb{R}^*$.

Le grand axe est alors (OF).

Posons $\vec{u}_t=\frac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$ de coordonnées $(\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}},\frac{1}{\sqrt{1+t^2}})$ et $\vec{v}_t$ unitaire et directement orthogonale à $\vec{u}_t$.

Appelons (x,y) les coordonnées d'un point dans l'ancien repère et (X,Y) ses coordonnées dans $(O,\vec{u}_t,\vec{v}_t)$.

On a les formules :

$$\begin{cases} x=t-\dfrac{tX+Y}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=\dfrac{X-tY}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{y-t(x-t)}{\sqrt{1+t^2}} \\ Y=-\dfrac{(x-t)+yt}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

Dans $(O,\vec{u}_t,\vec{v}_t)$, *H* admet une équation de la forme $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ avec $c^2=a^2+b^2=OF^2=1+t^2$ **(1)**.

Dans $(O,\vec{u}_t,\vec{v}_t)$, *D* (d'équation y = 0 dans l'ancien repère) admet pour équation $X=tY$.

Or, les asymptotes ont pour équation $X = \pm \frac{a}{b} Y$ donc $\frac{a}{b} = |t|$ **(2)**.

De **(1)** et **(2)**, on tire $b = 1$ et $a^2 = t^2$.

Dans $(O, \vec{u}_t, \vec{v}_t)$, les sommets de *H* ont pour coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, soit $(t, 0)$ et $(-t, 0)$.

En revenant à l'ancien repère, on obtient les coordonnées :

$$\begin{cases} x_1(t) = t - \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \\ y_1(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2(t) = t + \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \\ y_2(t) = -\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

L'ensemble recherché est donc la réunion des deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ paramétrées comme ci-dessus quand t décrit $\mathbb{R}^*$.

Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\begin{cases} x_2(-t) = -x_1(t) \\ y_2(-t) = y_1(t) \end{cases}$ donc la courbe $\mathscr{C}_2$ est la symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des ordonnées.

Nous n'étudierons que $\mathscr{C}_1$.

Les fonctions x_1 et y_1 sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} x_1'(t) = \dfrac{(1+t^2)\sqrt{1+t^2} - 2t - t^3}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \\ y_1'(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$.

On a $y_1'(t) > 0$ pour tout t et $x_1'(t) > 0$ pour $t \leq 0$. Si $t > 0$, on peut écrire :

$$x_1'(t) = \frac{(1+t^2)^3 - (2t+t^3)^2}{\left[(1+t^2)\sqrt{1+t^2} + (2t+t^3)\right](1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{1-t^2-t^4}{\left[(1+t^2)\sqrt{1+t^2} + (2t+t^3)\right](1+t^2)\sqrt{1+t^2}}.$$

Les racines de $1 - X - X^2$ sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ donc $1 - X - X^2 = -(X - \frac{\sqrt{5}-1}{2})(X + \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ et :

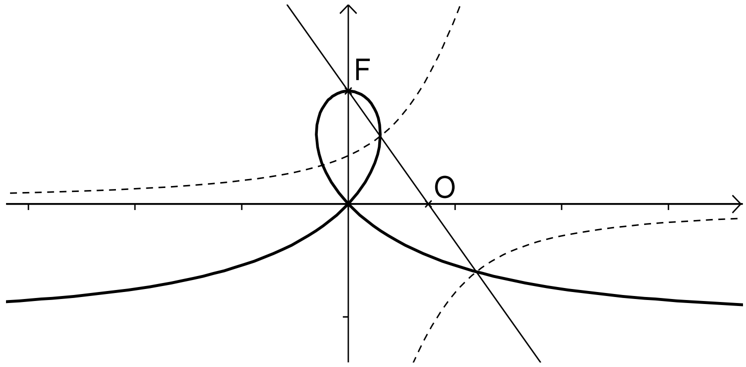
$$x_1'(t) = \frac{(t^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - t^2)}{\left[(1+t^2)\sqrt{1+t^2} + (2t+t^3)\right](1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{(t^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + t)(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - t)}{\left[(1+t^2)\sqrt{1+t^2} + (2t+t^3)\right](1+t^2)\sqrt{1+t^2}}.$$

Ici, on a considéré $t > 0$ donc $x_1'(t)$ est du signe de $t_o - t$ avec $t_o = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

On obtient le tableau :

t	$-\infty$		0		t_o		$+\infty$
x'(t)		$+$	‖	$+$	0	$-$	
x	$-\infty$	↗	0 ‖ 0	↗	$x(t_o)$	↘	0
y	-1	↗	0 ‖ 0	↗	$y(t_o)$	↗	1
y'(t)		$+$	‖		$+$		

Et la courbe (en gras) :



Exercice 11

Remarquons déjà qu'ici a² = 1 et b² = 3 donc $c^2 = a^2 + b^2 = 4$ et c = 2.

Soit un cercle *C* de centre Ω passant par le sommet A et le foyer F qui recoupe *H* en trois points M_1, M_2 et M_3. Cela est toujours la cas, sauf si le centre de *C* est le milieu de [AF], auquel cas l'un des trois points est confondu avec A. On suppose donc que *C* n'est pas le cercle diamètre [AF], donc que Ω n'est pas sur (Oy).

Comme $\Omega A = \Omega F$, Ω appartient à la médiatrice de [AF] qui a pour équation $x = \frac{x_A + x_F}{3} = \frac{1}{2}$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ l'ordonnée de Ω et R est le rayon de *C*. On a $R^2 = \Omega A^2 = \frac{9}{4} + t^2$ et une équation de *C* est alors :

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - t)^2 = \frac{9}{4} + t^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + y^2 - 2ty = 2.$$

Prouver que $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral revient à prouver que son centre de gravité G est confondu avec le centre de son cercle circonscrit, soit Ω.

Si on pose $M_i(x_i, y_i)$ pour i = 1, 2 et 3, on a $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ et $y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de *C* et *H* revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - x + y^2 - 2ty = 2 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

Et on cherche les solutions telles que $y \neq 0$ pour ne pas prendre A en compte.

Par soustraction des deux équations, on obtient **(1)** : $x = \frac{4}{3}y^2 - 2ty - 1$.

En remplaçant dans la seconde équation :

$$(\frac{4}{3}y^2 - 2ty - 1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16}{9}y^4 - \frac{16}{3}ty^3 + (4t^2 - 3)y^2 + 4ty = 0.$$

Comme on a supposé $y \neq 0$, on peut simplifier et y_1, y_2 et y_3 sont les solutions de :

$$y^3 - 3ty^2 + \frac{9(4t^2 - 3)}{16}y + \frac{9}{4}t = 0.$$

Alors, $y^3-3ty^2+\frac{9(4t^2-3)}{16}y+\frac{9}{4}t=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$ et en développant le second membre, on obtient :

$$y^3-3ty^2+\frac{9(4t^2-3)}{16}y+\frac{9}{4}t=y^3-(y_1+y_2+y_3)y^2+(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)y-y_1y_2y_3.$$

Par identification, on a alors :

$$y_1+y_2+y_3=3t$$
$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=\frac{9(4t^2-3)}{16}$$
$$y_1y_2y_3=-\frac{9}{4}t$$

Remarque : Les quantités $y_1+y_2+y_3$, $y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1$ et $y_1y_2y_3$ s'appellent fonctions symétriques de racines. On en reparlera dans l'année.

D'après la première égalité, on a bien : $y_G=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=t=y_\Omega$. Et, d'après **(1)** :

$$x_G=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{4}{3}y_1^2-2ty_1-1\right)+\left(\frac{4}{3}y_2^2-2ty_2-1\right)+\left(\frac{4}{3}y_3^2-2ty_3-1\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-2t(y_1+y_2+y_3)-3\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-6t^2-3\right]$$

Or, $y_1^2+y_2^2+y_3^2=(y_1+y_2+y_3)^2-2(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)=(3t)^2-2\frac{9(4t^2-3)}{16}=\frac{9}{2}t^2+\frac{27}{8}$ donc :

$$x_G=\frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{9}{2}t^2+\frac{27}{8}\right)-6t^2-3\right]=\frac{1}{3}\left[6t^2+\frac{9}{2}-6t^2-3\right]=\frac{1}{2}=x_\Omega.$$

Finalement, on a bien $G=\Omega$ donc :

$$\boxed{M_1M_2M_3 \text{ est un triangle équilatéral.}}$$

Exercice 12

a) $mx^2+4mx+(m-1)y^2+2=0$.

On peut transformer l'équation en $m(x+2)^2+(m-1)y^2=4m-2$ et la nature de la courbe dépend de la position de m par rapport à 0, 1 et ½.

- Si $m=0$, l'équation devient $y=\pm 2$ et la courbe est la réunion de deux droites horizontales.
- Si $m=1$, l'équation devient $x=-2\pm\sqrt{2}$ et la courbe est la réunion de deux droites verticales.
- Si $m=½$, l'équation devient $y=\pm(x+2)$ et la courbe est la réunion de deux droites.

Si m est différent de 0, 1 et ½, on peut écrire :

$$\frac{(x+2)^2}{A_m}+\frac{y^2}{B_m}=1.$$

avec $A_m=4\frac{m-½}{m}$ et $B_m=4\frac{m-½}{m-1}$.

- Si $m<0$, alors $A_m>0$ et $B_m>0$, donc la courbe est une ellipse.
- Si $0<m<½$, alors $A_m<0$ et $B_m>0$, donc la courbe est une hyperbole de grand axe (Oy).
- Si $½<m<1$, alors $A_m>0$ et $B_m<0$, donc la courbe est une hyperbole de grand axe (Ox).
- Si $m>1$, alors $A_m>0$ et $B_m>0$, donc la courbe est à nouveau une ellipse.

b) $x^2+2mxy+y^2+2mx-m^2=0$.

Si $m=0$, l'équation devient $x^2+y^2=0$ donc la courbe est réduite au point O.

On a vu dans l'exercice 1 qu'en se plaçant dans le repère $(O,\vec{u}_{\pi/4},\vec{v}_{\pi/4})$ et en appelant X et Y les coordonnées dans ce nouveau repère, on a :

$$x=\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \text{ et } y=\frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

Alors $x^2+y^2=X^2+Y^2$ et $2xy=X^2-Y^2$ donc :

$$\begin{aligned} x^2+2mxy+y^2+2mx-m^2=0 \quad &\Leftrightarrow \quad X^2+Y^2+m(X^2-Y^2)+\sqrt{2}m(X-Y)-m^2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1+m)X^2+(1-m)Y^2+\sqrt{2}mX-\sqrt{2}mY=m^2 \end{aligned}$$

- Si $m=-1$, l'équation devient :

$$2Y^2-\sqrt{2}X+\sqrt{2}Y=1 \quad \Leftrightarrow \quad (Y+\frac{\sqrt{2}}{4})^2=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+\frac{5\sqrt{2}}{8}).$$

  La courbe est une parabole (d'axe dirigé par $\vec{u}_{\pi/4}$).

- Si $m=1$, l'équation devient :

$$2X^2+\sqrt{2}X-\sqrt{2}Y=1 \quad \Leftrightarrow \quad Y+\frac{5\sqrt{2}}{8}=\sqrt{2}(X+\frac{\sqrt{2}}{4})^2.$$

  La courbe est une parabole (d'axe dirigé par $\vec{v}_{\pi/4}$).

Maintenant, si $m\neq 0$ et $m^2\neq 1$, l'équation peut se récrire :

$$(1+m)\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{1+m}\right)^2+(1-m)\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{1-m}\right)^2=m^2\frac{2-m^2}{1-m^2}.$$

- Si $m=-\sqrt{2}$, l'équation devient $Y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(X-\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{1+\sqrt{2}}$. La courbe est donc la réunion de deux droites.
- Si $m=\sqrt{2}$, l'équation devient $Y=\pm\sqrt{3}\left(X+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{1-\sqrt{2}}$. La courbe est donc la réunion de deux droites.
- Si $m^2\neq 2$, l'équation devient :

$$\frac{\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{1+m}\right)^2}{A_m}+\frac{\left(Y-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{1-m}\right)^2}{B_m}=1.$$

  avec $A_m=\frac{m^2}{(1+m)^2}\frac{2-m^2}{1-m}$ et $B_m=\frac{m^2}{(1-m)^2}\frac{2-m^2}{1+m}$.

La nature de la courbe dépend du signe de A_m et B_m. On a le tableau de signes :

m	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
A_m		$-$	0	$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
B_m		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$	0	$-$	

On constate que A_m et B_m ne sont jamais simultanément négatif donc la courbe est toujours définie et :

- Si $m \in]-\infty;-\sqrt{2}[\cup]1;\sqrt{2}[$, la courbe est une hyperbole d'axe dirigé par $\vec{v}_{\pi/4}$;
- Si $m \in]-\sqrt{2};1[\cup]\sqrt{2};+\infty[$, la courbe est une hyperbole d'axe dirigé par $\vec{u}_{\pi/4}$;
- Si $m \in]-1;1[$, la courbe est une ellipse.

On peut résumer dans le tableau suivant :

m	$m<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<m<-1$	-1	$-1<m<0$	0
Nature de la courbe	*Hyperbole*	*Deux droites*	*Hyperbole*	*Parabole*	*Ellipse*	*Point*
m	$0<m<1$	1	$1<m<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$m>\sqrt{2}$	
Nature de la courbe	*Ellipse*	*Parabole*	*Hyperbole*	*Deux droites*	*Hyperbole*