Corrigés des TD du Chapitre 7

Exercice 1

On a :

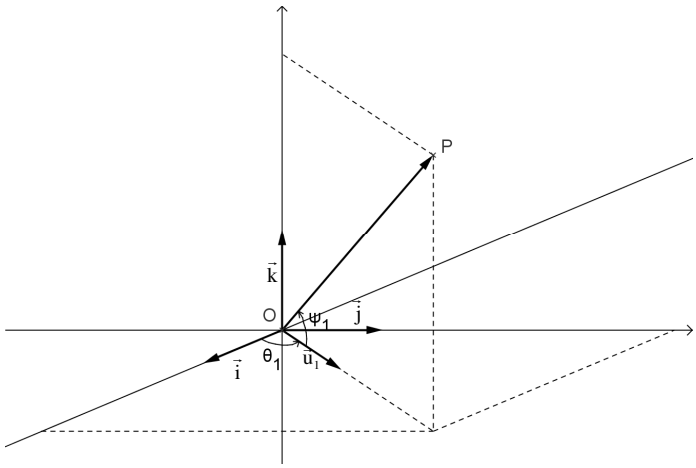
$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \sin(a+d) = \sin a \cos d + \cos a \sin d \\ \sin(b+d) = \sin b \cos d + \cos b \sin d = \cos d \\ \sin(c+d) = \sin c \cos d + \cos c \sin d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin a \\ \sin b + \sin d \\ \sin c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos a \\ \cos b = (\cos d)\vec{v} + (\sin d)\vec{u} \\ \cos c \end{vmatrix}.$$

Donc $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui implique que :

$$\boxed{\text{Les trois vecteurs sont coplanaires.}}$$

Exercice 2

1) Dans le repère *R*, on a, pour le point P, la figure suivante :



On a alors :

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\psi_1\vec{u}_1 + R\sin\psi_1\vec{k} = R\cos\psi_1\cos\theta_1\vec{i} + R\cos\psi_1\sin\theta_1\vec{j} + R\sin\psi_1\vec{k}.$$

On procède de la même façon pour M.

Ainsi, les coordonnées cartésiennes de P et M dans *R* sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} P\left(R\cos\psi_1\cos\theta_1, R\cos\psi_1\sin\theta_1, R\sin\psi_1\right) \\ M\left(R\cos\psi_2\cos\theta_2, R\cos\psi_2\sin\theta_2, R\sin\psi_2\right) \end{array}}$$

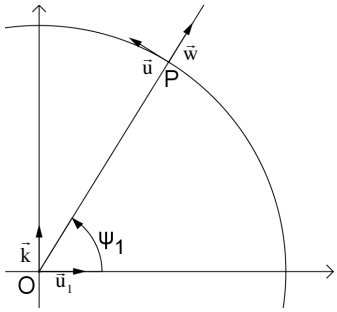
On a vu que $\overrightarrow{OP} = R\cos\psi_1\vec{u}_1 + R\sin\psi_1\vec{k}$ donc dans le repère R', on a $P\left(R\cos\psi_1, 0, R\sin\psi_1\right)$ et on obtient les coordonnées de M de la même façon que dans le repère *R*, mais en remplaçant θ_2 par $\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Ainsi, les coordonnées cartésiennes de P et M dans R' sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} P\left(R\cos\psi_1, 0, R\sin\psi_1\right) \\ M\left(R\cos\psi_2\cos(\theta_2-\theta_1), R\cos\psi_2\sin(\theta_2-\theta_1), R\sin\psi_2\right) \end{array}}$$

Dans R_P, on a bien sûr $P(0,0,0)$ et posons $M(X,Y,Z)$.

Dans le plan $(O,\vec{u}_1,\vec{k})$, on a la figure :



Le vecteur $\vec{v}_1$ est orthogonal au plan de la figure et vers l'arrière (pour que R' soit direct) alors que le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal au plan de la figure mais vers l'avant (car dirigé vers l'ouest). Donc :

$$\begin{cases} \vec{u} = -\sin\psi_1\vec{u}_1 + \cos\psi_1\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{v}_1 \\ \vec{w} = \cos\psi_1\vec{u}_1 + \sin\psi_1\vec{k} \end{cases}$$

On a alors :

- d'une part :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{w} \\ &= -X\sin\psi_1\vec{u}_1 + X\cos\psi_1\vec{k} - Y\vec{v}_1 + Z\cos\psi_1\vec{u}_1 + Z\sin\psi_1\vec{k} \\ &= \left(Z\cos\psi_1 - X\sin\psi_1\right)\vec{u}_1 - Y\,\vec{v}_1 + \left(X\cos\psi_1 + Z\sin\psi_1\right)\vec{k} \end{aligned}$$

- d'autre part :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} \\ &= R\cos\psi_2\cos(\theta_2-\theta_1)\vec{u}_1 + R\cos\psi_2\sin(\theta_2-\theta_1)\vec{v}_1 + R\sin\psi_2\vec{k} - R\cos\psi_1\vec{u}_1 - R\sin\psi_1\vec{k} \\ &= \left(R\cos\psi_2\cos(\theta_2-\theta_1) - R\cos\psi_1\right)\vec{u}_1 + R\cos\psi_2\sin(\theta_2-\theta_1)\vec{v}_1 + \left(R\sin\psi_2 - R\sin\psi_1\right)\vec{k} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} R\cos\psi_2\cos(\theta_2-\theta_1) - R\cos\psi_1 = Z\cos\psi_1 - X\sin\psi_1 \\ R\cos\psi_2\sin(\theta_2-\theta_1) = -Y \\ R\sin\psi_2 - R\sin\psi_1 = X\cos\psi_1 + Z\sin\psi_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = R\left(\cos\psi_1\sin\psi_2 - \cos(\theta_2-\theta_1)\sin\psi_1\cos\psi_2\right) \\ Y = -R\cos\psi_2\sin(\theta_2-\theta_1) \\ Z = R\cos\psi_1\cos\psi_2\cos(\theta_2-\theta_1) + R\sin\psi_1\sin\psi_2 - R \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées cartésiennes de P et M dans R_P sont :

$$\boxed{\begin{array}{l} P(0,0,0) \\ M(X,Y,Z) \text{ avec } \begin{cases} X = R\left(\cos\psi_1\sin\psi_2 - \cos(\theta_2-\theta_1)\sin\psi_1\cos\psi_2\right) \\ Y = -R\cos\psi_2\sin(\theta_2-\theta_1) \\ Z = R\cos(\theta_2-\theta_1)\cos\psi_1\cos\psi_2 + R\sin\psi_1\sin\psi_2 - R \end{cases} \end{array}}$$

2) Soit M' le projeté orthogonal de M sur le plan tangent à la sphère terrestre en P, engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et orienté par $\vec{w}$.

L'azimut α est alors donné par $\alpha = (\vec{u}, \overrightarrow{PM'})$ et on a, avec $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ et $\vec{v}$:

- d'une part : $\vec{u}.\overrightarrow{PM'} = \vec{u}.\overrightarrow{PM} = X$ et $\vec{v}.\overrightarrow{PM'} = \vec{v}.\overrightarrow{PM} = Y$;
- d'autre part : $\vec{u}.\overrightarrow{PM'} = PM'\cos\alpha$ et $\vec{v}.\overrightarrow{PM'} = PM'\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -PM'\sin\alpha$.

Donc $\tan\alpha = -\frac{Y}{X}$, soit :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\cos\psi_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{\cos\psi_1 \sin\psi_2 - \cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\psi_1 \cos\psi_2}}$$

3) On a ici $\psi_1 = 49°$, $\psi_2 = 21°$ et $\theta_2 - \theta_1 = 40° - 2° = 38°$ donc :

$$\tan\alpha = \frac{\cos(21°)\sin(38°)}{\cos(49°)\sin(21°) - \cos(38°)\sin(49°)\cos(21°)} \approx -1,79555018$$

Et on obtient alors :

$$\boxed{\alpha \approx 119°}$$

4) En posant $\beta = \widehat{POM}$ (exprimé en degrés), la distance à vol d'oiseau entre Paris et la Mecque à la surface de la terre de rayon R est donnée par $d = 2\pi R\frac{\beta}{360}$. Il faut donc évaluer β.

Comme les deux villes sont dans l'hémisphère nord, β est compris entre 0 et 180° et donc parfaitement défini par son cosinus.

On a $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} = OP \times PM \times \cos(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) = R^2\cos\beta$.

Or :

$$\overrightarrow{OP} = R\cos\psi_1\cos\theta_1\vec{i} + R\cos\psi_1\sin\theta_1\vec{j} + R\sin\psi_1\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM} = R\cos\psi_2\cos\theta_2\vec{i} + R\cos\psi_2\sin\theta_2\vec{j} + R\sin\psi_2\vec{k}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} &= R^2\left(\cos\psi_1\cos\theta_1\cos\psi_2\cos\theta_2 + \cos\psi_1\sin\theta_1\cos\psi_2\sin\theta_2 + \sin\psi_1\sin\psi_2\right)\\ &= R^2\left(\cos\psi_1\cos\psi_2\cos(\theta_2 - \theta_1) + \sin\psi_1\sin\psi_2\right)\end{aligned}$$

Et :

$$\cos\beta = \cos\psi_1\cos\psi_2\cos(\theta_2 - \theta_1) + \sin\psi_1\sin\psi_2.$$

Avec $\psi_1 = 49°$, $\psi_2 = 21°$ et $\theta_2 - \theta_1 = 38°$, on obtient $\beta \approx 41,1°$

Ainsi, avec $d = 2\pi R\frac{\beta}{360}$ et $R = 6400$ km, on obtient :

$$\boxed{d \approx 4595 \text{ km}}$$

Exercice 3

Soit (r,θ,z) les coordonnées cylindriques de M. Celles de M' sont alors $(r,\theta,0)$ et celles de M', $(r,\theta+\frac{\pi}{3},0)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{OM''} - \overrightarrow{OM} &= r\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\vec{i} + r\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\vec{j} - r\cos\theta\vec{i} - r\sin\theta\vec{j} - z\vec{k}\\ &= r\left(\cos(\theta+\frac{\pi}{3}) - \cos\theta\right)\vec{i} + r\left(\sin(\theta+\frac{\pi}{3}) - \sin\theta\right)\vec{j} - z\vec{k}\\ &= -2r\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}\vec{i} + 2r\cos(\theta+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}\vec{j} - z\vec{k}\\ &= -r\sin(\theta+\frac{\pi}{6})\vec{i} + r\cos(\theta+\frac{\pi}{6})\vec{j} - z\vec{k}\end{aligned}$$

Donc :

$$\overrightarrow{MM''} = \vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r\sin(\theta+\frac{\pi}{6}) = -1 \\ r\cos(\theta+\frac{\pi}{6}) = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ceci implique que :

$$\tan(\theta+\frac{\pi}{6}) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta+\frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } -\frac{\pi}{4} \ [2\pi].$$

Mais, on doit avoir $\cos(\theta+\frac{\pi}{6}) > 0$ et $\sin(\theta+\frac{\pi}{6}) < 0$ donc la valeur $\frac{3\pi}{4}$ est exclue. D'où :

$$\theta+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} \ [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -\frac{5\pi}{12} \ [2\pi].$$

Alors, $r\cos(\theta+\frac{\pi}{6}) = r\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{r}{\sqrt{2}} = 1$ donc $r = \sqrt{2}$.

Finalement, les coordonnées cylindriques de M sont $(\sqrt{2}, -\frac{5\pi}{12}, -1)$ et, en cartésiennes :

$$\begin{aligned} x_M &= \sqrt{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\\ y_M &= \sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\\ z_M &= -1\end{aligned}$$

Or, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{12} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$ donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

Et de même avec $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$, on obtient $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un unique point M tel que } \overrightarrow{MM''} = \vec{u}\text{, le point } M(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -1)}$$

Exercice 4

1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthogonale directe de l'espace.

Le triplet $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u}, \vec{v})$ est alors direct lui aussi, donc $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ et de même sens.

Et $\| (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u} \| = \| \vec{u} \wedge \vec{v} \| \times \| \vec{u} \| = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \| \vec{u} \|$ donc :

$$\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u} = \| \vec{u} \|^2 \, \vec{v}}$$

2) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{0} \wedge \vec{w} = \vec{0}$ et si $\vec{v} = k\vec{u}$, on a $(\vec{u}.\vec{w})k\vec{u} - (k\vec{u}.\vec{w})\vec{u} = \vec{0}$ donc la relation est vérifiée.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, si $\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\vec{P}$ engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base de l'espace dans laquelle on peut décomposer $\vec{w}$ en $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{k}$.

On a de plus, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \lambda\vec{k}$ donc $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda\vec{k} \wedge (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{k}) = \lambda a(\vec{k} \wedge \vec{u}) + \lambda b(\vec{k} \wedge \vec{v})$.

Or, $\vec{k} \wedge \vec{u}$ et $\vec{k} \wedge \vec{v}$ sont orthogonaux à $\vec{k}$ donc sont dans $\vec{P}$, ce qui implique $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ l'est aussi et donc, on peut écrire :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

Supposons maintenant que $\vec{u} \perp \vec{v}$. On a alors :

$$\begin{cases} \left((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}\right).\vec{u} = \left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right).\vec{u} = \alpha \| \vec{u} \|^2 \\ \left((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}\right).\vec{v} = \left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right).\vec{v} = \beta \| \vec{v} \|^2 \end{cases}$$

Mais :

$$\begin{cases} \left((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}\right).\vec{u} = \left[\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right] = \left[\vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}\right] = \left(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})\right).\vec{w} = -\left((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}\right).\vec{w} \\ \left((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}\right).\vec{v} = \left[\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}, \vec{v}\right] = \left[\vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w}\right] = \left(\vec{v} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})\right).\vec{w} = \left((\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v}\right).\vec{w} \end{cases}$$

Et avec la première question, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u} = \| \vec{u} \|^2 \, \vec{v}$ et $(\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \| \vec{v} \|^2 \, \vec{u}$, donc :

$$\begin{cases} \left((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}\right).\vec{u} = -\| \vec{u} \|^2 \, (\vec{v}.\vec{w}) \\ \left((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}\right).\vec{v} = \| \vec{v} \|^2 \, (\vec{u}.\vec{w}) \end{cases}$$

Et ainsi :

$$\begin{cases} \alpha \| \vec{u} \|^2 = -\| \vec{u} \|^2 \, (\vec{v}.\vec{w}) \\ \beta \| \vec{v} \|^2 = \| \vec{v} \|^2 \, (\vec{u}.\vec{w}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(\vec{v}.\vec{w}) \\ \beta = (\vec{u}.\vec{w}) \end{cases}$$

Soit :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\vec{u}.$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont quelconques, on peut décomposer $\vec{v}$ dans $\vec{P}$ en $\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}$ avec $\vec{v}_{//}$ colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}_{\perp}$ orthogonal à $\vec{u}$. On a alors :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \left(\vec{u} \wedge (\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp})\right) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{v}_{//} + \vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp}) \wedge \vec{w}.$$

Et, d'après ce qui précède, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}_{//}$ colinéaires et $\vec{u} \perp \vec{v}_{\perp}$:

$$\begin{aligned} (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\vec{u} &= (\vec{u}.\vec{w})(\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}) - \left((\vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}).\vec{w}\right)\vec{u} = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v}_{//} + (\vec{u}.\vec{w})\vec{v}_{\perp} - (\vec{v}_{//}.\vec{w})\vec{u} - (\vec{v}_{\perp}.\vec{w})\vec{u} \\ &= (\vec{u}.\vec{w})\vec{v}_{//} - (\vec{v}_{//}.\vec{w})\vec{u} + (\vec{u}.\vec{w})\vec{v}_{\perp} - (\vec{v}_{\perp}.\vec{w})\vec{u} = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v}_{\perp} - (\vec{v}_{\perp}.\vec{w})\vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp}) \wedge \vec{w} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}.\vec{w})\vec{u}}$$

3) On vient de voir que $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}.\vec{w})\vec{u}$ et de même :

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=-(\vec{v}\wedge\vec{w})\wedge\vec{u}=(\vec{w}\wedge\vec{v})\wedge\vec{u}=(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}.\vec{u})\vec{w}.$$

On a donc :

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}-\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{v}.\vec{u})\vec{w}-(\vec{v}.\vec{w})\vec{u}$$

Ce vecteur n'est pas forcément nul donc, en général, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}\neq\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ et :

$$\boxed{\text{Le produit vectoriel n'est pas associatif.}}$$

4) On a :

$$(\vec{u}\wedge\vec{v}).(\vec{w}\wedge\vec{z})=[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\wedge\vec{z}]=[\vec{w}\wedge\vec{z},\vec{u},\vec{v}]=\big((\vec{w}\wedge\vec{z})\wedge\vec{u}\big).\vec{v}.$$

Et d'après la question 2, $(\vec{w}\wedge\vec{z})\wedge\vec{u}=(\vec{u}.\vec{w})\vec{z}-(\vec{z}.\vec{u})\vec{w}$ donc :

$$(\vec{u}\wedge\vec{v}).(\vec{w}\wedge\vec{z})=\big((\vec{u}.\vec{w})\vec{z}-(\vec{z}.\vec{u})\vec{w}\big).\vec{v}=(\vec{u}.\vec{w})(\vec{z}.\vec{v})-(\vec{z}.\vec{u})(\vec{w}.\vec{v}).$$

Soit :

$$\boxed{(\vec{u}\wedge\vec{v}).(\vec{w}\wedge\vec{z})=(\vec{u}.\vec{w})(\vec{v}.\vec{z})-(\vec{u}.\vec{z})(\vec{v}.\vec{w})}$$

5) Toujours à l'aide de la question 2, on a :

$$\begin{aligned}(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge(\vec{w}\wedge\vec{z})&=-(\vec{w}\wedge\vec{z})\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})\\&=-\big(\vec{w}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\big)\vec{z}+\big(\vec{z}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\big)\vec{w}\\&=\big((\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{z}\big)\vec{w}-\big((\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}\big)\vec{z}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge(\vec{w}\wedge\vec{z})=[\vec{u},\vec{v},\vec{z}]\vec{w}-[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\vec{z}}$$

Exercice 5

1) Plusieurs cas se présentent :

- Si $\vec{u}=\vec{v}=\vec{0}$, tout vecteur est solution.
- Si $\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, il n'y a pas de solution.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}=\vec{0}$, $\vec{u}\wedge\vec{x}=\vec{0}$ si et seulement $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc la droite dirigée par $\vec{u}$ est solution.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\wedge\vec{x}\perp\vec{u}$ quel que soit $\vec{x}$ non nul donc si $\vec{v}$ n'est pas orthogonal à $\vec{u}$, l'équation n'admet pas de solution.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\perp\vec{u}$, le triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})=\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},\frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}\right)$ est une base orthonormée directe de l'espace. En posant $\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}$, on a :

$$\vec{u}\wedge\vec{x}=\|\vec{u}\|\,\vec{i}\wedge(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k})=\|\vec{u}\|(x_2\vec{k}-x_3\vec{j})=\frac{1}{\|\vec{v}\|}(x_2\vec{u}\wedge\vec{v}-\|\vec{u}\|x_3\vec{v})$$

Donc :

$$\vec{u}\wedge\vec{x}=\vec{v}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\|\vec{v}\|}(x_2\vec{u}\wedge\vec{v}-\|\vec{u}\|x_3\vec{v})=\vec{v}\quad\Leftrightarrow\quad x_2\vec{u}\wedge\vec{v}=(\|\vec{u}\|x_3+\|\vec{v}\|)\vec{v}\,.$$

Or, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc :

$$\vec{u}\wedge\vec{x}=\vec{v}\quad\Leftrightarrow\quad x_2=\|\vec{u}\|x_3+\|\vec{v}\|=0\quad\Leftrightarrow\quad x_2=0\text{ et }x_3=-\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{x}=x_1\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}-\frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\,.$$

Donc, les solutions sont de la forme $k\vec{u}+\dfrac{\vec{v}\wedge\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ avec k réel.

2) a. $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ son colinéaires $\Leftrightarrow$ M est sur (AB).

$$\boxed{\text{L'ensemble recherché est la droite (AB).}}$$

b. $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BC}=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC}$ son colinéaires $\Leftrightarrow$ M est sur la parallèle à (BC) passant par A.

$$\boxed{\text{L'ensemble recherché est la droite parallèle à (BC) passant par A.}}$$

c. On suppose $\vec{u}\neq\vec{0}$, sinon on retombe sur la question a.

Pour tout point M, $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}\wedge(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}=\vec{u}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BA}=\vec{u}$.

Ceci implique que $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$, donc, si $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal à $\vec{u}$, il n'y a pas de solution.

Si maintenant $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$, alors soit D tel que $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\vec{u}\wedge\overrightarrow{AB}}{AB^2}$. D'après la question 1, on a $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{BA}=\vec{u}$ et :

$$\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BA}=\vec{u}\quad\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{BA}\quad\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{BA}=\vec{0}.$$

Donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{\text{L'ensemble recherché est la droite parallèle à (AB) passant par D.}}$$

d. Pour tout point M, on a $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}\wedge(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}$.

Appelons H le projeté orthogonal de C sur (AB) et plaçons-nous dans un repère orthonormé direct $(H,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ dont l'axe des abscisses est (AB) orienté de A vers B et l'axe des ordonnées est (HC).

Dans ce repère, on a $A(a,0,0)$, $B(b,0,0)$ (avec $b=a+AB$) et $C(0,c,0)$ et posons $M(x,y,z)$.

On a alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\wedge(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM})=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{HM}=AB\vec{i}\wedge(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=AB(y\vec{k}-z\vec{j})$ et :

$$(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM})\wedge\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM})\wedge\overrightarrow{CM}=AB(y\vec{k}-z\vec{j})\wedge[x\vec{i}+(y-c)\vec{j}+z\vec{k}]=AB\left(xy\vec{j}+xz\vec{k}-[(y-c)y+z^2]\vec{i}\right).$$

Donc :

$$(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BM})\wedge\overrightarrow{CM}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad xy=xz=(y-c)y+z^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad xy=xz=0 \text{ et } (y-\frac{c}{2})^2+z^2=\frac{c^2}{4}.$$

Soit I le milieu de [HC], on a $(y-\frac{c}{2})^2+z^2=\frac{c^2}{4} \Leftrightarrow (y-y_I)^2+(z-z_I)^2=IC^2$.

Considérons alors deux cas de figure :

- si $x=0$, alors $(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=IC^2 \Leftrightarrow IM=IC$ donc M est sur le cercle de centre I et de rayon IC dans le plan $x=0$, c'est-à-dire le cercle de diamètre [HC] dans le plan perpendiculaire à (AB) en H.
- si $x\neq 0$, alors $y=z=0$ donc M est sur (AB).

Ainsi :

L'ensemble recherché est la réunion de (AB) et du cercle de diamètre [HC] dans plan perpendiculaire à (AB) en H.

e. Soit G le centre de gravité de ABC. Pour tout point M, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ donc :

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\wedge\overrightarrow{MA}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MG}\wedge\overrightarrow{MA}=\vec{0}.$$

On se retrouve dans le cas de la question a, donc :

L'ensemble recherché est la droite (AG), soit la médiane issue de A dans ABC.

Exercice 6

$$\begin{aligned}
\det(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w}+\vec{u}) &= \det(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{w})+\det(\vec{u}+\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{u})\\
&= \det(\vec{u}+\vec{v},\vec{v},\vec{w})+\underbrace{\det(\vec{u}+\vec{v},\vec{w},\vec{w})}_{0}+\underbrace{\det(\vec{u},\vec{v}+\vec{w},\vec{u})}_{0}+\det(\vec{v},\vec{v}+\vec{w},\vec{u})\\
&= \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\underbrace{\det(\vec{v},\vec{v},\vec{w})}_{0}+\underbrace{\det(\vec{v},\vec{v},\vec{u})}_{0}+\det(\vec{v},\vec{w},\vec{u})\\
&= \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})+\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\\
&= 2\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})
\end{aligned}$$

Exercice 7

a. Par la méthode de Sarrus :

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= (a+c)(1+a^2)(1+b^2)+(b+c)(1+a^2)(1+c^2)+(a+b)(1+b^2)(1+c^2)\\
&\qquad -(a+c)(1+b^2)(1+c^2)-(a+b)(1+a^2)(1+c^2)-(b+c)(1+a^2)(1+b^2)\\
&= (a+b)(1+c^2)\left[(1+b^2)-(1+a^2)\right]+(a+c)(1+b^2)\left[(1+a^2)-(1+c^2)\right]+(b+c)(1+a^2)\left[(1+c^2)-(1+b^2)\right]\\
&= (a+b)(1+c^2)(b^2-a^2)+(a+c)(1+b^2)(a^2-c^2)+(b+c)(1+a^2)(c^2-b^2)\\
&= (a+b)(1+c^2)(b^2-a^2)+(a+c)(1+b^2)(a^2-c^2)+(b+c)(1+a^2)(c^2-a^2)+(b+c)(1+a^2)(a^2-b^2)\\
&= \left[(a+b)(1+c^2)-(b+c)(1+a^2)\right](b^2-a^2)-\left[(a+c)(1+b^2)-(b+c)(1+a^2)\right](c^2-a^2)\\
&= \left[a-c+b(c^2-a^2)+ac(c-a)\right](b^2-a^2)-\left[a-b+c(b^2-a^2)+ab(b-a)\right](c^2-a^2)\\
&= (ab+bc+ac-1)(c-a)(b^2-a^2)-(ab+bc+ac-1)(b-a)(c^2-a^2)
\end{aligned}$$

Et :

$$\boxed{\Delta_1 = (ab+bc+ac-1)(c-a)(b-a)(b-c)}$$

b. Ici, nous allons procéder autrement. Posons :

$$\vec{u}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix},\quad \vec{v}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{w}\begin{vmatrix}(1+b^2)(1+c^2)\\(1+a^2)(1+c^2)\\(1+a^2)(1+b^2)\end{vmatrix}.$$

On a alors $\begin{vmatrix}b+c\\a+c\\a+b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+b+c-a\\a+b+c-b\\a+b+c-c\end{vmatrix} = (a+b+c)\vec{u}-\vec{v}$ et :

$$\Delta_1 = \det(\vec{u},(a+b+c)\vec{u}-\vec{v},\vec{w}) = (a+b+c)\det(\vec{u},\vec{u},\vec{w}) - \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}).$$

Et :

$$\Delta_2 = \det(\vec{v},(a+b+c)\vec{u}-\vec{v},\vec{w}) = (a+b+c)\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) - \det(\vec{v},\vec{v},\vec{w}) = (a+b+c)\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = (a+b+c)\Delta_1.$$

Donc :

$$\boxed{\Delta_2 = (a+b+c)(ab+bc+ac-1)(c-a)(b-a)(b-c)}$$

c. En s'inspirant de la méthode précédente sans nommer les vecteurs en jeu, retranchons la 2ème colonne à la 1ère et à la 3ème :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}(a+b)^2-c^2 & c^2 & 0\\ a^2-(c+b)^2 & (c+b)^2 & a^2-(c+b)^2\\ 0 & b^2 & (a+c)^2-b^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(a+b-c)(a+b+c) & c^2 & 0\\ (a-c-b)(a+c+b) & (c+b)^2 & (a-c-b)(a+c+b)\\ 0 & b^2 & (a+c-b)(a+c+b)\end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & c^2 & 0\\ a-b-c & (c+b)^2 & a-b-c\\ 0 & b^2 & a-b+c\end{vmatrix} = -(a+b+c)^2\begin{vmatrix}a+b-c & 0 & c^2\\ a-b-c & a-b-c & (c+b)^2\\ 0 & a-b+c & b^2\end{vmatrix}$$

Par la méthode de Sarrus :

$$\begin{vmatrix}a+b-c & 0 & c^2\\ a-b-c & a-b-c & (c+b)^2\\ 0 & a-b+c & b^2\end{vmatrix} = (a+b-c)(a-b-c)b^2 + c^2(a-b-c)(a-b+c) - (a-b+c)(c+b)^2(a+b-c)$$

$$\begin{aligned}
&= (a-b-c)\left[(a+b-c)b^2+(a-b+c)c^2\right] - \left[a^2-(b-c)^2\right](c+b)^2\\
&= (a-b-c)\left[a(b^2+c^2)+(b-c)(b^2-c^2)\right] - \left[a^2-(b-c)^2\right](c+b)^2\\
&= \big(a-(b+c)\big)\left[a(b+c)^2-2abc+(b-c)^2(b+c)\right] - \left[a^2-(b-c)^2\right](c+b)^2\\
&= a^2(b+c)^2 - a(b+c)^2(b+c) - 2abc\big(a-(b+c)\big) + a(b-c)^2(b+c)\\
&\qquad - (b-c)^2(b+c)^2 - a^2(c+b)^2 + (b-c)^2(c+b)^2\\
&= a(b+c)\left[(b-c)^2-(b+c)^2\right] - 2abc\big(a-(b+c)\big)\\
&= -4abc(b+c) - 2abc\big(a-(b+c)\big) = -2abc(a+b+c)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta_3 = 2abc(a+b+c)^3}.$$

Exercice 8

1) On a :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda + \mu \\ z = 4 - \lambda - 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda + \mu \\ y + z = 2 - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2(2y + z) + 3(2 - y - z) = 7 - 7y - 5z \\ \lambda = 2y + z \\ \mu = 2 - y - z \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{P_1 : x + 7y + 5z = 7}$$

2) Un vecteur normal à P_2 est $\vec{n}_2(2,-1,3)$ et un vecteur normal à P_3 est $\vec{n}_3(1,0,2)$.

Du fait de la deuxième coordonnées, il est clair que $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas colinéaires, donc P_2 et P_3 ne sont pas parallèles.

Un système d'équation cartésiennes de la droite $P_2 \cap P_3$ est alors $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ et si l'on pose $t = z$ comme paramètre, on a $\begin{cases} y = 2x + 3z - 1 = 2(4 - 2t) + 3t - 1 \\ x = 4 - 2z = 4 - 2t \\ z = t \end{cases}$ d'où la représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 7 - t \\ z = t \end{cases}}$$

3) On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{vmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 14 \\ 6 \\ -4 \end{vmatrix} \neq \vec{0}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc (ABC) est bien un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et :

$$M(x,y,z) \in (ABC) \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14(x-1) + 6(y-2) - 4(z-3) = 0.$$

Un équation cartésienne de (ABC) est donc :

$$\boxed{7x + 3y - 2z = 7}$$

4) Pour déterminer $D_1 \cap P_2$, on résout :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t + 1 \\ z = t - 1 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t + 1 \\ z = t - 1 \\ 2(3 - t) - (2t + 1) + 3(t - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}.$$

$$\boxed{D_1 \cap P_2 \text{ est donc réduite au point de coordonnées } (2,3,0)}$$

5) D'après les représentations paramétriques des droites, $\vec{u}_1 \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{vmatrix}$ sont directeurs de D_1 et D_2 respectivement.

Or, $D_1 \subset Q$ et $D_2 \,//\, Q$, donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont dans $\vec{Q}$.

Et $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} 12 \\ 8 \\ -4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} = 4\vec{n}$ donc $\vec{n} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ est normal à Q.

Enfin, encore d'après sa représentation paramétrique, le point E de coordonnées $(3,1,-1)$ est sur D_1 donc appartient à Q. Alors :

$$M(x,y,z) \in Q \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}.\overrightarrow{EM} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-3)+2(y-1)-(z+1)=0.$$

Un équation cartésienne de Q est donc :

$$\boxed{3x+2y-z=12}$$

6) Pour déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$, on peut utiliser la représentation paramétrique de $P_2 \cap P_3$ obtenue à la question 2, ou plus généralement résoudre le système formé par les trois équation cartésiennes des plans, soit :

$$\begin{cases} x+7y+5z=7 \\ 2x-y+3z=1 \\ x+2z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y+3z=3 \\ y=7-z \\ x=4-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z=46 \\ y=7-z \\ x=4-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=11,5 \\ y=-4,5 \\ x=-19 \end{cases}$$

$$\boxed{P_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ est donc réduite au point de coordonnées } (-19,-\frac{9}{2},\frac{23}{2})}$$

7) On a vu que $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix}$ donc une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=3-t \end{cases}$.

On trouve donc $(AB) \cap P_2$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=3-t \\ 2x-y+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=3-t \\ 2t+2-2+3t+9-3t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=14 \\ z=7 \\ t=-4 \end{cases}$$

$$\boxed{(AB) \cap P_2 \text{ est donc réduite au point de coordonnées } (-3,14,7)}$$

8) Soit D la droite passant par $A(1,2,3)$, parallèle à P_2 et coupant D_1.

Cette droite est incluse dans le plan P_2' parallèle à P_2 et passant par A.

Une équation cartésienne de P_2' est de la forme $2x-y+3z=\text{cste}$ et, comme $A \in P_2'$, on a :

$$P_2' : 2x-y+3z=9.$$

Si $F = D \cap D_1$, alors, comme $D \subset P_2'$, on a $F \in P_2' \cap D_1$ et $M(x,y,z) \in P_2' \cap D_1$ si $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t + 1 \\ z = t - 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Ce qui donne $F(10,-13,-8)$.

Un vecteur directeur de D est $\overrightarrow{AF}\left|\begin{matrix} 9 \\ -15 \\ -11 \end{matrix}\right.$ donc une représentation paramétrique de D est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 9t + 1 \\ y = 2 - 15t \\ z = 3 - 11t \end{cases}}$$

9) On a vu que $E(3,1,-1)$ est un point de D_1 et $\vec{u}_1\left|\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$ est directeur de D_1 donc $\vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan recherché (s'il est non nul).

On a $\vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{EC} = \left|\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{matrix}\right. = 2\left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix}\right.$ donc $\left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{matrix}\right.$ est normal au plan recherché qui a une équation de la forme $x + 2y - 3z = cste$.

Enfin, le plan passe par $C(0,1,-2)$, d'où l'équation cartésienne :

$$\boxed{x + 2y - 3z = 8}$$

10) La droite recherchée est l'intersection de *P*, le plan médiateur de [BC] et du plan (ABC), dont une équation est $7x + 3y - 2z = 7$ d'après la question 3.

On a $\text{mil}[BC] = I\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = I(1,0,0)$ appartient à *P* et $\overrightarrow{CI} = \left|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right.$ est normal à *P*, donc une équation cartésienne de *P* est $x - y + 2z = 1$.

Ainsi, un système d'équations cartésienne de la médiatrice de [BC] dans le plan (ABC) est :

$$\boxed{\begin{cases} 7x + 3y - 2z = 7 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}}$$

Exercice 9

1) *C* est l'intersection du plan *P*, d'équation $x + y + z - 3 = 0$ et de la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, donc de centre O et de rayon $R = \sqrt{5}$.

On a $d(O,P)=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}<\sqrt{5}$ donc $C=P\cap\Sigma$ est bien un cercle.

Son centre est H, le projeté orthogonal de O sur P et son rayon vaut $r=\sqrt{R^2-OH^2}=\sqrt{2}$.

Un vecteur normal à P est $\vec{n}(1,1,1)$. Or, $\overrightarrow{OH}$ est normal à P donc colinéaire à $\vec{n}$ et ainsi, $x_H=y_H=z_H$.

Comme $H\in P$, on a $x_H+y_H+z_H=3x_H=3$ donc $H(1,1,1)$.

Finalement :

$$\boxed{C \text{ est le cercle de centre } H(1,1,1) \text{ et de rayon } r=\sqrt{2} \text{ du plan } P.}$$

2) Pour déterminer $C\cap(xOy)$, il faut résoudre :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x^2+(3-x)^2=5 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x^2-3x+2=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x=1 \text{ ou } 2 \\ z=0 \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{C\cap(xOy)=\{A,A'\} \text{ avec } A(1,2,0) \text{ et } A'(2,1,0).}$$

De la même façon, on trouve :

$$\boxed{C\cap(xOz)=\{B,B'\} \text{ avec } B(1,0,2) \text{ et } B'(2,0,1).}$$

Et :

$$\boxed{C\cap(yOz)=\{C,C'\} \text{ avec } C(0,1,2) \text{ et } C'(0,2,1).}$$

3) Soit $T(x,y,z)$ un point de C tel que la tangente T à C en T coupe (Oz) en $T'(0,0,z')$.

Comme T est incluse dans P, $T'\in P$ donc $z'=3$ et forcément $T'(0,0,3)$

On a $(HT)\perp T$ donc $\overrightarrow{HT}.\overrightarrow{T'T}=0 \Leftrightarrow (x-1)x+(y-1)y+(z-1)(z-3)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x-y-4z+3=0$.

Et comme T est sur C, ses coordonnées sont solutions de :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \\ x^2+y^2+z^2-x-y-4z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{4}{3} \\ x^2+y^2=\frac{20}{9} \\ z=\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{4}{3}-x \\ (x-\frac{2}{3})^2=\frac{6}{9} \\ z=\frac{5}{3} \end{cases}$$

Donc, on trouve deux point de tangence possibles :

$$\boxed{T_1\left(\frac{2+\sqrt{6}}{3},\frac{2-\sqrt{6}}{3},\frac{5}{3}\right) \text{ et } T_2\left(\frac{2-\sqrt{6}}{3},\frac{2+\sqrt{6}}{3},\frac{5}{3}\right)}$$

4) Il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \\ xyz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \\ x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } z=0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont alors les six points trouvées à la question 2 :

$$\boxed{A(1,2,0),\ A'(2,1,0),\ B(1,0,2),\ B'(2,0,1),\ C(0,1,2)\ \text{et}\ C'(0,2,1).}$$

Ces six points sont par définition sur un même cercle : *C*.

Et on a $AA' = A'B' = B'B = BC = CC' = C'A = \sqrt{2}$ donc :

$$\boxed{AA'B'BCC'\ \text{est un hexagone régulier.}}$$

5) On a $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5$ donc :

$$\boxed{\text{Le centre de S est}\ \Omega(0,-1,2)\ \text{et son rayon est}\ \sqrt{5}.}$$

6) Les coordonnées des points de $S \cap (Ox)$ vérifient $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z = 0$ et $y = z = 0$ donc les seul point d'intersection de *S* avec l'axe des x est O.

Le plan tangent à *S* en O admet pour vecteur normal $\overrightarrow{O\Omega}(0,-1,2)$ et passe par O. On en déduit directement l'équation :

$$\boxed{-y + 2z = 0}$$

7) Pour déterminer $S \cap C$, il faut résoudre :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ 4z - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5,5 - 3z \\ y = 2z - 2,5 \\ 14z^2 - 43z + 31,5 = 0 \end{cases}$$

Et on trouve les deux points :

$$\boxed{\left(\frac{25-3\sqrt{85}}{28}, \frac{8+\sqrt{85}}{14}, \frac{43+\sqrt{85}}{28}\right)\ \text{et}\ \left(\frac{25+3\sqrt{85}}{28}, \frac{8-\sqrt{85}}{14}, \frac{43-\sqrt{85}}{28}\right)}$$

Exercice 10

Pour faciliter cet exercice, nous allons faire un changement de repère.

On a $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = -3\vec{j}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 12\vec{k}$.

Posons $\vec{I} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \dfrac{-4\vec{i} - 3\vec{j}}{5}$, $\vec{J} = \vec{k} \wedge \vec{I} = \dfrac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{5}$ et $\vec{K} = \vec{k}$.

Le repère $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est alors orthonormé direct et :

$$\begin{cases} \vec{I} = \dfrac{-4\vec{i} - 3\vec{j}}{5} \\ \vec{J} = \dfrac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} = \dfrac{-4\vec{I} + 3\vec{J}}{5} \\ \vec{j} = \dfrac{-3\vec{I} - 4\vec{J}}{5} \end{cases}$$

Si un point M a pour coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et

1. Remarquons que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 12\vec{k} \neq \vec{0}$ donc A, B et C ne sont pas alignés. Or, $z_A = z_B = z_C = 1$ donc le plan (ABC) a pour équation $z = 1$. Comme $z_D \neq 1$, D n'est pas dans (ABC) et donc :

$$\boxed{\text{A, B, C et D ne sont pas coplanaires.}}$$

2. Le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Ici, on prend ABC comme base et la hauteur correspondante issue de D.

- Dans le plan (ABC), l'aire de ABC est donnée par $a = \dfrac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$.

  Dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ de (ABC), on a $\overrightarrow{AB}(-4,-3)$ et $\overrightarrow{AC}(0,-3)$ donc $a = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 6$.

- Il est clair que comme (ABC) est le plan d'équation $z = 1$, il est parallèle à (xOy) et le projeté orthogonal de D sur (ABC) est $D'(-1,-5,1)$. La hauteur est donc $DD' = 2$.

Ainsi :

$$\boxed{V = \frac{6 \times 2}{3} = 4}$$

3. Comme plus haut si M' est le projeté orthogonal de M sur (ABC) :

$$V(\text{ABCM}) = \frac{a \times MM'}{3} = 2MM'.$$

Donc :

$$V(\text{ABCM}) = V = 4 \quad \Leftrightarrow \quad MM' = 2.$$

Et comme $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{k}$, on a :

$$V(\text{ABCM}) = V \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MM'} = \pm 2\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad z_M = -1 \text{ ou } 3.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'ensemble des points M tels que le volume de ABCM soit} \\ \text{égal à } V \text{ est la réunion des plans d'équations } z = -1 \text{ et } z = 3.\end{array}}$$

4. On a $\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{vmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = 8\vec{N}$ avec $\vec{N}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$. Une équation cartésienne de (BCD) est alors donnée par :

$$\overrightarrow{BM}.\vec{N} = y + 1 - 2(z-1) = y - 2z + 3 = 0.$$

Alors $d = d\big(A,(BCD)\big) = \dfrac{|y_A - 2z_A + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, soit :

$$\boxed{d = \frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

5. Soit M un point de l'espace et H, son projeté orthogonal sur (BCD). On a alors :

$$d\big(M,(BCD)\big) = HM .$$

Alors, si A' est le projeté orthogonal de A sur (BCD), on a $d = AA'$ et :

$$d\big(M,(BCD)\big) = d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HM} = \pm\,\overrightarrow{AA'} .$$

Ceci prouve que M est dans un plan parallèle à (BCD) et à la distance *d*.

Ainsi :

L'ensemble des points M tels que la distance de M à (BCD) soit égal à *d* est la réunion des plans parallèles à (BCD) passant par A et par son symétrique par rapport à (BCD).

Exercice 11

1) On a $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{BG}$.

Dans $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$, on a :

- $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AF} = (1-\lambda)\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{BF}$ donc $I(1-\lambda, 0, \lambda)$.
- $\overrightarrow{BJ} = \mu\overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BF}$ donc $J(0, \mu, \mu)$.

Alors, $\overrightarrow{IJ}(\lambda-1, \mu, \mu-\lambda)$, $\overrightarrow{AF}(-1,0,1)$ et $\overrightarrow{BG}(0,1,1)$ donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AF} = 0 \\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BG} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2\lambda+\mu = 0 \\ 2\mu-\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{3} \text{ et } \lambda = \frac{2}{3}}$$

On a alors :

$$\boxed{I(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}) \text{ et } J(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})}$$

2) On a $K = (FJ) \cap (BC)$ donc il existe un réel a tel que :

$$\overrightarrow{FK} = a\overrightarrow{FJ} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BK} = (1-a)\overrightarrow{BF} + a\overrightarrow{BJ} = (1-a)\overrightarrow{BF} + \frac{a}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{a}{3}\overrightarrow{BF} = (1-\frac{2a}{3})\overrightarrow{BF} + \frac{a}{3}\overrightarrow{BC}$$

et un réel b tel que $\overrightarrow{BK} = b\overrightarrow{BC}$.

Donc, par identification des coordonnées, on obtient $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.

Ceci montre que :

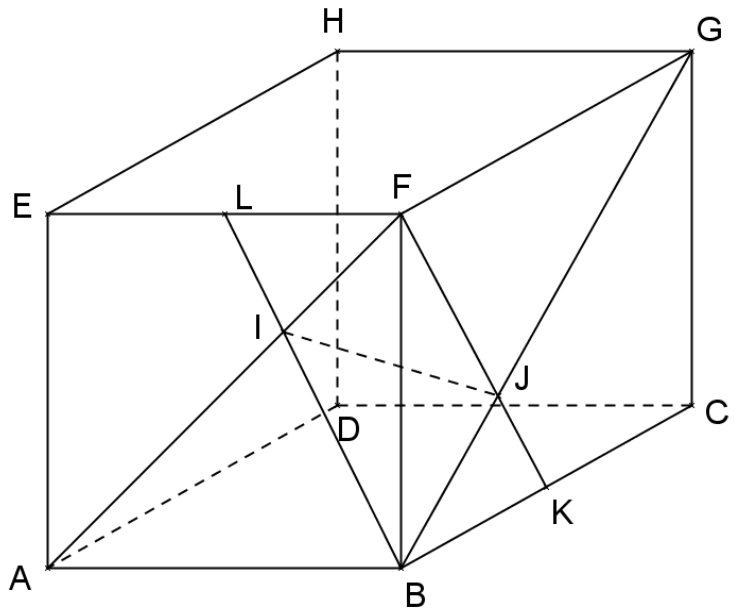
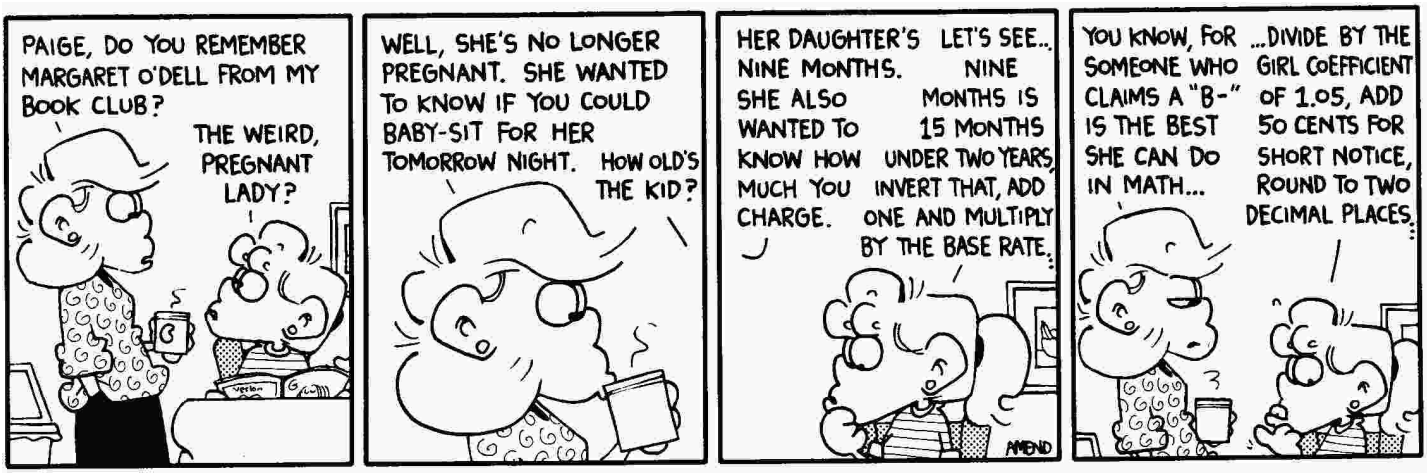
K est le milieu de [BC].

De la même façon, on trouve que :

L est le milieu de [EF].

Pour construire Δ, on procède alors comme suit :

1. On construit L, le milieu de [EF], puis $I = (AF) \cap (BL)$.

2. On construit K, le milieu de [BC], puis $J = (FK) \cap (BG)$.

3. $\Delta = (IJ)$.