# *Corrigés des TD du Chapitre 8*

## *Exercice 1*

a. On a $F\cup G\in \mathscr{P}(F\cup G)$. Donc, si $\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)$ :

$$F\cup G\in \mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G) \Leftrightarrow F\cup G\in \mathscr{P}(F) \text{ ou } \mathscr{P}(G) \Leftrightarrow F\cup G\subset F \text{ ou } F\cup G\subset G \Leftrightarrow G\subset F \text{ ou } F\subset G.$$

Réciproquement :

- Si $F\subset G$, $F\cup G=G$ et $\mathscr{P}(F)\subset\mathscr{P}(G)$ donc $\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)=\mathscr{P}(G)$.
- De même, si $G\subset F$, $\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)=\mathscr{P}(F)$.

Finalement, on a :

$$\boxed{\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G) \text{ si et seulement si } F\subset G \text{ ou } G\subset F.}$$

On a :

$$A\in \mathscr{P}(F)\cap\mathscr{P}(G) \Leftrightarrow A\subset F \text{ et } A\subset G \Leftrightarrow A\subset F\cap G \Leftrightarrow A\in \mathscr{P}(F\cap G).$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{P}(F\cap G)=\mathscr{P}(F)\cap\mathscr{P}(G)}$$

b. Si $\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(E)$, on a $E\in \mathscr{P}(E)=\mathscr{P}(F\cup G)$ donc $E\subset F\cup G\subset E$ soit $E=F\cup G$.

Réciproquement, il est clair que si $E=F\cup G$, alors $\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(E)$.

Donc :

$$\boxed{\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(E) \text{ si et seulement si } E=F\cup G.}$$

c. Si $\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)=\mathscr{P}(E)$, alors $E\in \mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)$ donc $E\in \mathscr{P}(F)$ ou $E\in \mathscr{P}(G)$, soit $E\subset F$ ou $E\subset G$, ou encore, $F=E$ ou $G=E$.

Réciproquement, il est clair que si $F=E$ ou $G=E$, alors $\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)=\mathscr{P}(E)$.

Donc :

$$\boxed{\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)=\mathscr{P}(E) \text{ si et seulement si } F=E \text{ ou } G=E.}$$

## *Exercice 2*

On a $\mathscr{P}(E)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},E\}$ et :

$$\boxed{\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))=\left\{\begin{array}{l}\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\},\{\{b\}\},\{E\},\{\varnothing,\{a\}\},\{\varnothing,\{b\}\},\{\varnothing,E\},\{\{a\},\{b\}\},\{\{a\},E\},\{\{b\},E\},\\ \{\varnothing,\{a\},\{b\}\},\{\varnothing,\{a\},E\},\{\varnothing,\{b\},E\},\{\{a\},\{b\},E\},\{\varnothing,\{a\},\{b\},E\}\end{array}\right\}}$$

**Exercice 3**

On veut prouver que :

$$E = F \quad \Leftrightarrow \quad E \cup F = E \cap F.$$

($\Rightarrow$) Si $E = F$, alors $E \cup F = E = F$ et $E \cap F = E = F$ donc $\underline{E \cup F = E \cap F}$.

($\Leftarrow$) Quels que soient E et F, on a :

$$E \cap F \subset E \subset E \cup F \quad \text{et} \quad E \cap F \subset F \subset E \cup F.$$

Donc, si $E \cup F = E \cap F$, alors $E = E \cap F = E \cup F$ et $F = E \cap F = E \cup F$ donc $\underline{E = F}$.

**Exercice 4**

a. On a :

$$\begin{aligned} x \in A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \setminus B \text{ ou } x \in B \setminus A \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \text{ ou } B \text{ mais n'est pas dans les deux en même temps} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$$

b. Supposons que $A \vartriangle B = A \cap B$. On a alors, d'après la question précédente : $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap B$.

Or, $\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) \cap \big(A \cap B\big) = \varnothing$ donc $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap B = \varnothing$.

Mais, si $A \cap B = \varnothing$, on a $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus \varnothing = A \cup B$ donc $A \cup B = \varnothing$.

Et comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on obtient bien :

$$\boxed{A = B = \varnothing}$$

**Exercice 5**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \left[a - \frac{1}{n} ; b + \frac{1}{n}\right]$ et $J_n = \left]a - \frac{1}{n} ; b + \frac{1}{n}\right[$ et remarquons trois choses :

- Si $b < a$, alors en posant $N = 1 + E\left[\frac{2}{a-b}\right]$, on a $N > \frac{2}{a-b}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$n \geq N > \frac{2}{a-b} \quad \Rightarrow \quad a - \frac{1}{n} > b + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad I_n = J_n = \varnothing.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a - \frac{1}{n} < a - \frac{1}{n+1}$ et $b + \frac{1}{n+1} < b + \frac{1}{n}$ donc $I_{n+1} \subset I_n$ et $J_{n+1} \subset J_n$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a - \frac{1}{n} < a$ et $b < b + \frac{1}{n}$ donc, si $b \geq a$, $[a ; b] \subset I_n$ et $[a ; b] \subset J_n$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n \subset I_n$ donc $F \subset E$ et $H \subset G$.

On a alors trois cas :

- Si $b < a$ et $N = 1 + E\left[\dfrac{2}{a-b}\right] = 1$, soit $\underline{a > b+2}$, tous les intervalles $I_n$ et $J_n$ sont vides et :
$$E = F = G = H = \varnothing .$$
- Si $\underline{b < a \leq b+2}$, on a $N \geq 2$ et $I_{N-1} \subset I_{N-2} \subset ... \subset I_2 \subset I_1$ et $J_{N-1} \subset J_{N-2} \subset ... \subset J_2 \subset J_1$, d'où :
$$E = \bigcup_{n=1}^{N-1} I_n = I_1, \quad F = \bigcup_{n=1}^{N-1} J_n = J_1 \quad \text{et} \quad G = H = \varnothing .$$
- Si $\underline{b \geq a}$, alors aucun des $I_n$ et $J_n$ n'est vide et on a :
$$[a\,;b] \subset ... \subset I_p \subset ... \subset I_2 \subset I_1 \text{ et } [a\,;b] \subset ... \subset J_p \subset ... \subset J_2 \subset J_1 .$$
  Donc :
  - tous les $I_n$ sont inclus dans $I_1$, lui-même inclus dans E donc $E = I_1$ ;
  - tous les $J_n$ sont inclus dans $J_1$, lui-même inclus dans F donc $F = J_1$ ;
  - tous les $I_n$ et $J_n$ contiennent $[a\,;b]$ donc $[a\,;b] \subset H \subset G$ **(1)** ;
  - pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $a - \varepsilon < a - \dfrac{1}{n}$ et $b + \varepsilon > b + \dfrac{1}{n}$ donc $a - \varepsilon \notin I_n$ et $b + \varepsilon \notin I_n$.
    Ceci prouve que $\forall\, x \notin [a\,;b]$, il existe n tel que $x \notin I_n$ donc $x \notin G$ et ainsi $G \subset [a\,;b]$ **(2)** ;
  - **(1)** et **(2)** impliquent que $H = G = [a\,;b]$.

En résumé :

- Si $a > b+2$, $E = F = G = H = \varnothing$.
- Si $b < a \leq b+2$, $E = [a-1\,;b+1]$, $F = ]a-1\,;b+1[$ et $G = H = \varnothing$.
- Si $b \geq a$, $E = [a-1\,;b+1]$, $F = ]a-1\,;b+1[$ et $H = G = [a\,;b]$.

***Exercice 6***

a. Avant de commencer, remarquons que pour $f : E \to F$ quelconque, $\forall B \subset F$, $f^{-1}(B) = \{x \in E \setminus f(x) \in B\}$ donc $\forall A \subset E$, $f(A) \subset F$ et :
$$f^{-1}(f(A)) = \{x \in E \setminus f(x) \in f(A)\}.$$

Alors $\forall x \in A$, $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$ , ce qui prouve que, quelle que soit f, injective ou non, on a :
$$\forall A \subset E,\ A \subset f^{-1}(f(A)).$$

On doit alors prouver l'équivalence :
$$f \text{ injective} \iff \forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) \subset A .$$

($\Rightarrow$) Supposons <u>f injective</u>.

Soit $A \subset E$. $\forall x \in f^{-1}(f(A))$, on a $f(x) \in f(A)$ donc il existe $x' \in A$, tel que $f(x) = f(x')$.

Mais comme f est injective, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ et ainsi, comme $x' \in A$, $x \in A$.

Donc, $\forall x \in f^{-1}(f(A))$, $x \in A$ ce qui prouve que $\underline{f^{-1}(f(A)) \subset A}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\underline{\forall A \subset E,\ f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A}$.

Soient x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$ et posons $A = \{x\}$. On a $f(x') = f(x) \in f(A)$ donc $x' \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Comme, $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$, on a $x' \in A = \{x\}$, soit $x' = x$.

Ainsi, $\forall (x, x') \in E^2$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ et ainsi, <u>f est injective</u>.

b. Ici aussi, faisons un préambule.

Pour $f : E \to F$ quelconque et $\forall A \subset E$, on a $f(A) = \{y \in F \backslash \exists\, x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}$ donc $\forall B \subset F$, $f^{-1}(B) \subset E$ et :

$$f(f^{-1}(B)) = \{y \in F \backslash \exists\, x \in f^{-1}(B) \text{ tel que } f(x) = y\}.$$

Alors $\forall y \in f(f^{-1}(B))$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$. Or, $x \in f^{-1}(B)$ si et seulement si $f(x) \in B$ donc $y \in B$ et ainsi, quelle que soit f, surjective ou non, on a :

$$\forall B \subset F,\ f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B.$$

On doit alors prouver l'équivalence :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall B \subset F,\ B \subset f\big(f^{-1}(B)\big).$$

($\Rightarrow$) Supposons <u>f surjective</u>.

Soit $B \subset F$. $\forall y \in B$, comme f est surjective y possède au moins un antécédent x par f.

On a alors $y = f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$ et $y = f(x) \in f\big(f^{-1}(B)\big)$.

Ainsi, $\forall y \in B$, $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$ donc $\underline{B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\underline{\forall B \subset F,\ B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)}$.

Pour $B = F$, on a $F \subset f\big(f^{-1}(F)\big)$ donc $\forall y \in F$, $y \in f\big(f^{-1}(F)\big)$ donc il existe $x \in f^{-1}(F) \subset E$ tel que $y = f(x)$ ce qui prouve que tout élément de F admet au moins un antécédent dans E par f donc que <u>f est surjective</u>.

***Exercice 7***

- $\forall (x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$, on a en composant par $f \circ f$, $f \circ f\big(f(x)\big) = f \circ f\big(f(x')\big)$, soit $f \circ f \circ f(x) = f \circ f \circ f(x')$. Mais comme $f \circ f \circ f = id_E$, $f \circ f \circ f(x) = x$ et $f \circ f \circ f(x') = x'$, d'où $x = x'$.

  Ainsi, f est injective.
- $\forall y \in E$, on a $y = f \circ f \circ f(y) = f\big(f \circ f(y)\big) = f(x)$ avec $x = f \circ f(y)$, donc y admet un antécédent par f.

  Ainsi, f est surjective.

Finalement :

$$\boxed{\text{f est bijective.}}$$

On a alors en composant l'égalité $f \circ f \circ f = id_E$ par $f^{-1}$, $f^{-1} \circ (f \circ f \circ f) = f^{-1} \circ id_E = f^{-1}$.

Par associativité de la loi $\circ$, on $f^{-1} \circ (f \circ f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f \circ f = id_E \circ f \circ f = f \circ f$ et donc :

$$\boxed{f^{-1} = f \circ f}$$

**Exercice 8**

Remarquons que $f(0)=\dfrac{0+1}{0^2+1^2}=1$ et $f(1)=\dfrac{1+1}{1^2+1^2}=1$ donc $f(1)=f(0)$. Deux rationnels ont la même image donc <u>f n'est pas injective</u>.

$\forall r=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ avec $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p,q)=1$, on a $f(r)=\dfrac{p+q}{p^2+q^2}=\dfrac{1}{q}\dfrac{r+1}{r^2+1}=\dfrac{1}{q}g(r)$ avec $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Comme $q\geq 1$, on a $0<\dfrac{1}{q}\leq 1$ et $\forall r\in\mathbb{Q}$, $|f(r)|\leq|g(r)|$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car rationnelle) avec :

$$g'(x)=\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)}=\frac{1-x^2-2x}{(x^2+1)}=\frac{2-(x+1)^2}{(x^2+1)}=\frac{(\sqrt{2}-x-1)(\sqrt{2}+x+1)}{(x^2+1)}=-\frac{(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x^2+1)}.$$

On a le tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}-1$ | | $\sqrt{2}-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | $\searrow$ | $g(-\sqrt{2}-1)$ | $\nearrow$ | $g(\sqrt{2}-1)$ | $\searrow$ | $0$ |

avec $g(-\sqrt{2}-1)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ et $g(\sqrt{2}-1)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Ce tableau montre que g est bornée sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall r\in\mathbb{Q}$, $|f(r)|\leq|g(r)|$, f est bornée sur $\mathbb{Q}$ donc n'atteint pas toutes les valeurs de $\mathbb{Q}$ et ainsi, <u>f n'est pas surjective</u>.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'application f n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.}}$$

**Exercice 9**

L'application f est injective si et seulement si $\forall(X,X')\in\mathscr{P}(E)^2$, $f(X)=f(X')\Rightarrow X=X'$.

Autrement dit ici, f est injective si et seulement si $\forall(X,X')\in\mathscr{P}(E)^2$, $\begin{cases}X\cap A=X'\cap A\\ X\cap B=X'\cap B\end{cases}\Rightarrow X=X'$.

Si $A\cup B\neq E$, alors il existe un élément a de E qui n'est ni dans A, ni dans B. Alors, si X est une partie de E ne contenant pas a et $X'=X\cup\{a\}$, on a $X\cap A=X'\cap A$ et $X\cap B=X'\cap B$ mais $X\neq X'$ donc f n'est pas injective.

Ceci montre que : f injective $\Rightarrow A\cup B=E$.

Réciproquement, supposons que $A\cup B=E$.

On a alors $\forall X\in\mathscr{P}(E)$, $(X\cap A)\cup(X\cap B)=X\cap(A\cup B)=X\cap E=X$ et :

$$f(X)=f(X')\Leftrightarrow\begin{cases}X\cap A=X'\cap A\\ X\cap B=X'\cap B\end{cases}\Rightarrow(X\cap A)\cup(X\cap B)=(X'\cap A)\cup(X'\cap B)\Leftrightarrow X=X'$$

donc, f est injective.

Ainsi :

$$\boxed{\text{f injective}\Leftrightarrow A\cup B=E.}$$

Vu la condition pour l'injectivité de f, on suppute que la surjectivité va être liée à l'intersection de A et B.

Supposons f surjective.

Alors, $\forall (Y,Y') \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ telle que $X \cap A = Y$ et $X \cap B = Y'$.

En particulier pour $(Y,Y') = (\varnothing, B)$, il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ telle que $X \cap A = \varnothing$ et $X \cap B = B$. La deuxième égalité se reformule en $B \subset X$. Alors $B \cap A \subset X \cap A = \varnothing$, ce qui donne $A \cap B = \varnothing$.

Ceci montre que : f surjective $\Rightarrow$ $A \cap B = \varnothing$.

Réciproquement, supposons que $A \cap B = \varnothing$.

Soit $(Y,Y') \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Posons $X = Y \cup Y'$.

On a $X \cap A = (Y \cup Y') \cap A = (Y \cap A) \cup (Y' \cap A)$. Mais comme $Y \subset A$ et $Y' \subset B$ et $A \cap B = \varnothing$, on a $A \cap Y = Y$ et $A \cap Y' = \varnothing$ donc $X \cap A = Y \cup \varnothing = Y$.

De même, $X \cap B = Y'$ et ainsi, $f(X) = (X \cap A, X \cap B) = (Y,Y')$ donc $(Y,Y')$ admet un antécédent par f.

Donc f est surjective.

Ainsi :

$$\boxed{\text{f surjective} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing.}$$

Enfin :

$$\boxed{\text{f bijective} \Leftrightarrow A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \varnothing.}$$

***Exercice 10***

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$, on a :

- On a $x = x$ et $y \leq y$ donc $(x,y) \ll (x,y)$ et $\ll$ est *réflexive*.
- Si $(x,y) \ll (x',y')$ et $(x',y') \ll (x,y)$, on a $\begin{cases} x < x' & \textbf{(1)} \\ \text{ou} & \\ x = x' \text{ et } y \leq y' & \textbf{(2)} \end{cases}$ et $\begin{cases} x' < x & \textbf{(1')} \\ \text{ou} & \\ x = x' \text{ et } y' \leq y & \textbf{(2')} \end{cases}$.

  Or, si $x < x'$, on ne peut avoir ni **(1')**, ni **(2')** et si $x' < x$, on ne peut avoir ni **(1)**, ni **(2)**, donc $x = x'$.

  On a alors **(2)** et **(2')** qui impliquent que $y = y'$. Ainsi, $(x,y) = (x',y')$ et $\ll$ est *antisymétrique*.
- Si $(x,y) \ll (x',y')$ et $(x',y') \ll (x'',y'')$, on a $\begin{cases} x < x' & \textbf{(1)} \\ \text{ou} & \\ x = x' \text{ et } y \leq y' & \textbf{(2)} \end{cases}$ et $\begin{cases} x' < x'' & \textbf{(1')} \\ \text{ou} & \\ x' = x'' \text{ et } y' \leq y'' & \textbf{(2')} \end{cases}$.

  Remarquons ici que les quatre possibilités impliquent que $x \leq x' \leq x''$, donc :
  - si **(1)** est vraie, on a $x < x' \leq x'' \Rightarrow x < x''$ ;
  - si **(2)** est vraie, on a $x = x' \leq x''$ donc $x < x''$ ou $x = x''$ ;
  - de plus, si $x = x''$, alors comme $x \leq x' \leq x''$, on a $x = x' = x''$ donc **(2)** et **(2')** sont vraies et $y \leq y' \leq y''$ d'où $y \leq y''$.

  Finalement, on a bien $x < x''$ ou ( $x = x''$ et $y \leq y''$ ) donc $(x,y) \ll (x'',y'')$ et $\ll$ est *transitive*.

Donc :

$$\boxed{\ll \text{ est une relation d'ordre.}}$$

$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x',y')\in \mathbb{R}^2$, on a soit $x<x'$, soit $x=x'$, soit $x>x'$ et :

- si $x<x'$, alors $(x,y)\ll (x',y')$ ;
- si $x>x'$, alors $(x',y')\ll (x,y)$ ;
- si $x=x'$, on a alors soit $y\le y'$ et $(x,y)\ll (x',y')$, soit $y\ge y'$ donc $(x',y')\ll (x,y)$.

Ainsi, deux éléments de $\mathbb{R}^2$ sont toujours comparables et :

$$\boxed{\text{L'ordre est total.}}$$

2) Soit $(a,b)\in \mathbb{R}^2$.

L'ensemble de majorants de $(a,b)$ est :

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus (a,b)\ll (x,y)\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x>a \text{ ou } (x=a \text{ et } y\ge b)\} \\ &= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x>a\}\cup\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x=a \text{ et } y\ge b\} \end{aligned}$$

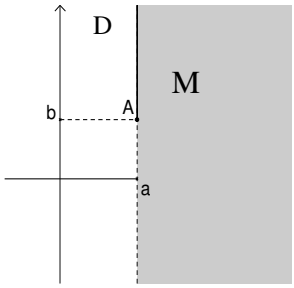
Or, l'ensemble $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x>a\}$ est un demi-plan ouvert délimité par la droite verticale D, d'équation $x=a$ et l'ensemble $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x=a \text{ et } y\ge b\}$ est une demi-droite fermée d'origine $A(a,b)$, incluse dans D.

L'ensemble de minorants de $(a,b)$ est :

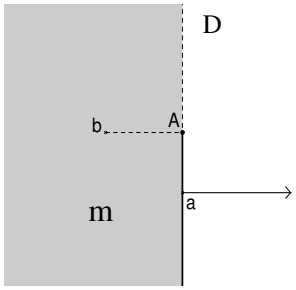
$$\begin{aligned} m &= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus (x,y)\ll (a,b)\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x<a \text{ ou } (x=a \text{ et } y\le b)\} \\ &= \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x<a\}\cup\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x=a \text{ et } y\le b\} \end{aligned}$$

Or, $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x<a\}$ est un demi-plan ouvert délimité par la droite D et $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x=a \text{ et } y\le b\}$ est une demi-droite fermée d'origine $A(a,b)$, incluse dans D.

On obtient les dessins :




*Majorants*




*Minorants*

3) On a $A=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus x^2+y^2\le 1\}$ donc A est le disque fermé de centre O et de rayon 1.

$\forall (x,y)\in A$, $x^2+y^2\le 1$ donc $x\le 1$ et :

- si $x=1$, alors $y=0$ et $(x,y)=(1,0)$ ;
- si $x<1$, on a $(x,y)\ll (1,b)$ pour tout réel b, en particulier $(x,y)\ll (1,0)$.

Ainsi, $\forall (x,y)\in A$, $(x,y)\ll (1,0)$ et $(1,0)$ est un majorant de A.

Or, $(1,0)\in A$ donc tout majorant $(a,b)$ de A vérifie $(1,0)\ll (a,b)$, ce qui prouve que $(1,0)$ est le plus petit majorant de A et donc :

$$\boxed{\sup A = \max A = (1,0)}$$

**Exercice 11**

Appelons $\prec$ la relation d'ordre sur E et $\lhd$ la relation d'ordre sur F.

1) Soit $f : E \to F$ croissante et injective et $(x, x') \in E$ tel que $x \prec x'$ et $x \neq x'$.

- Par croissance de f, $x \prec x' \Rightarrow f(x) \lhd f(x')$.
- Par injectivité de f, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

Donc, si $x \prec x'$ et $x \neq x'$, alors $f(x) \lhd f(x')$ et $f(x) \neq f(x')$ et ainsi :

$$\boxed{\text{f est strictement croissante.}}$$

2) Soit $f : E \to F$ strictement croissante et $(x, x') \in E$ tel que $f(x) = f(x')$.

Comme l'ordre est total sur E, on a soit $x \prec x'$ avec $x \neq x'$, soit $x' \prec x$ avec $x \neq x'$, soit $x = x'$.

- Si $x \prec x'$ avec $x \neq x'$, alors comme est strictement croissante, $f(x) \lhd f(x')$ et $f(x) \neq f(x')$.
- Si $x' \prec x$ avec $x \neq x'$, alors comme est strictement croissante, $f(x') \lhd f(x)$ et $f(x) \neq f(x')$.

Comme on a supposé que $f(x) = f(x')$, ces deux cas sont exclus donc $x = x'$.

Ainsi, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ donc :

$$\boxed{\text{f est injective.}}$$

3) La relation d'ordre partielle la plus courante est la relation d'inclusion. Essayons de bâtir un contre-exemple à l'aide de cette relation.

Soient E l'ensemble des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ (de la forme $[a, b]$ avec $a \leq b$) et f, l'application qui à tout élément de E, associe sa longueur, c'est-à-dire :

$$f : E \to \mathbb{R} \,;\, [a, b] \mapsto b - a.$$

Si $[a, b]$ et $[a', b']$ sont deux éléments de E tels que $[a, b] \subsetneq [a', b']$, alors $a' \leq a \leq b \leq b'$ avec soit $a \neq a'$, soit $b \neq b'$. Dans les deux cas, on a $b - a < b' - a'$, donc $f([a, b]) < f([a', b'])$.

Ainsi, $[a, b] \subsetneq [a', b'] \Rightarrow f([a, b]) < f([a', b'])$ donc f est strictement croissante.

Cependant, $f([0,1]) = f([1,2]) = 1$ et clairement $[0,1] \neq [1,2]$ donc f n'est pas injective.

**Exercice 12**

Notons $\lhd$ la relation « est inférieur à » définie dans l'énoncé.

Soit $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ trois cercles du plan, de centres respectifs O, O' et O'' et de rayons respectifs R, R' et R''.

- $OO = R - R = 0$ donc $OO \leq R - R$ et $\mathscr{C} \lhd \mathscr{C}$.

  La relation est *réflexive*.
- Si $\mathscr{C} \lhd \mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}' \lhd \mathscr{C}$, alors $OO' \leq R' - R$ et $O'O \leq R - R'$. Ceci implique clairement que $OO' = 0$ (soit $O = O'$) et $R = R'$. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont alors même centre et même rayon, donc $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$.

  La relation est *antisymétrique*.

- Si $\mathscr{C} \lhd \mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}' \lhd \mathscr{C}''$, alors $OO' \leq R' - R$ et $O'O'' \leq R'' - R'$. En additionnant membre à membre ces deux inégalités, on obtient $OO' + O'O'' \leq R'' - R$. Or, par l'inégalité triangulaire, on a $OO'' \leq OO' + O'O''$ donc $OO'' \leq R'' - R$, ce qui prouve que $\mathscr{C} \lhd \mathscr{C}''$.

  La relation est *transitive*.

Ainsi, $\lhd$ est une relation d'ordre.

$OO'$ et $R' - R$ sont des réels donc on peut toujours les comparer, donc deux cercles du plan peuvent toujours être comparés par $\lhd$ donc l'ordre est total.

Finalement :

$$\boxed{\text{La relation } \lhd \text{ est une relation d'ordre total.}}$$

***Exercice 13***

1) Comme f est à images dans $[0;1]$, $f(1) \in [0;1]$ donc $f(1) \leq 1$, soit $1 \in A$. Ainsi :

$$\boxed{A \neq \varnothing}$$

$\forall\, y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ et $f(x) \leq x$.

Comme $x \in A$, on a $f(x) \leq x$ soit $y \leq x$ et par croissance de f, on a alors $f(y) \leq f(x) = y$ donc $y \in A$.

Ainsi :

$$\boxed{f(A) \subset A}$$

2) Comme $A \subset [0;1]$, $a = \inf A \in [0;1]$. Soit $x \in A$.

Comme $a = \inf A$, on a $a \leq x$ et, par croissance de f, $f(a) \leq f(x)$.

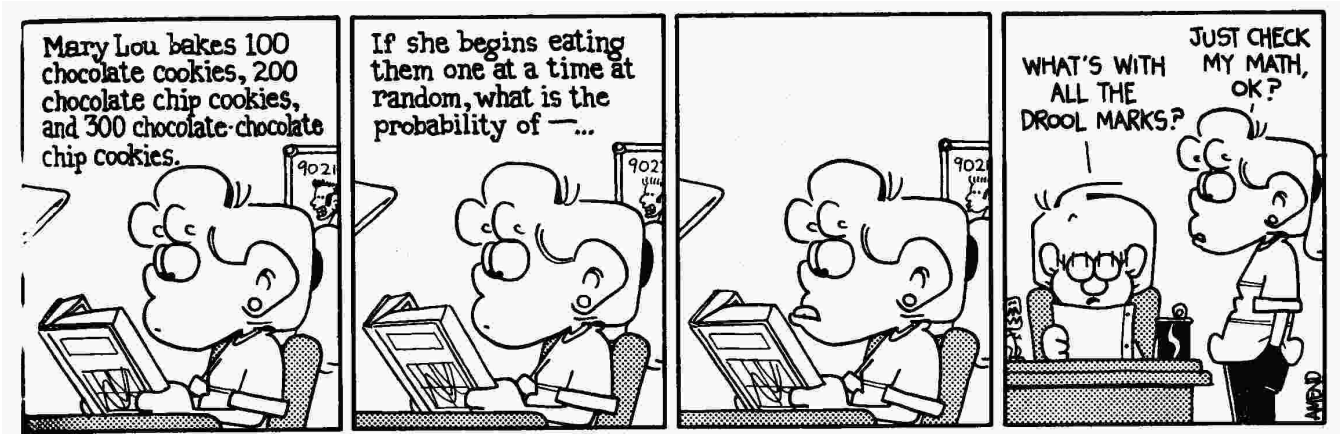
Mais $x \in A$ donc $f(x) \leq x$ et par transitivité, $f(a) \leq x$.

Ainsi, $\forall\, x \in A$, $f(a) \leq x$ donc :

$$\boxed{\text{f(a) minore A}}$$

Comme $a = \inf A$, a les le plus grand minorant de A donc, f(a) étant un minorant de A, on a $\underline{f(a) \leq a}$.

Ceci prouve que $a \in A$. Mais alors $f(a) \in f(A) \subset A$ donc $f(a) \in A$ et comme a minore A, on a $\underline{a \leq f(a)}$.

Avec les deux inégalités, on obtient bien :

$$\boxed{f(a) = a}$$