Corrigés des TD du Chapitre 5

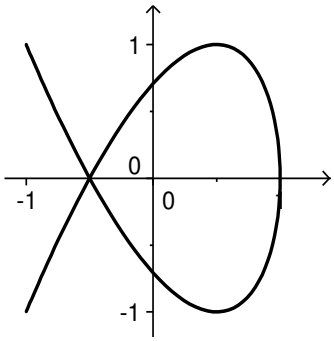
Exercice 1

a) $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$.

- Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques donc on peut étudier sur tout intervalle de longueur 2π.
- $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc la courbe est symétrique par rapport à (Ox). On peut étudier sur $[0;\pi]$.
- $\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$ donc la courbe est parcourue deux fois. On peut étudier sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.
- Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} x'(t) = -2\sin 2t \\ y'(t) = 3\cos 3t \end{cases}$ d'où le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
x'(t)		–		–	
x	1	↘		↘	– 1
y	0	↗	1	↘	– 1
y'(t)		+	0	–	

- Tangente verticale en $t = 0$.
- Tangente horizontale en $t = \frac{\pi}{6}$.
- $\begin{cases} x'(t) = -4\cos t \sin t \\ y'(t) = 3(1 - 4\sin^2 t)\cos t \end{cases}$ donc le vecteur tangent est colinéaire à $\begin{vmatrix} 4\sin t \\ 3(4\sin^2 t - 1) \end{vmatrix}$, ce qui donne $\begin{vmatrix} 4 \\ 9 \end{vmatrix}$ en $t = \frac{\pi}{2}$.
- On obtient la courbe :



b) $\begin{cases} x(t) = t^3 - 2t + \frac{1}{t} \\ y(t) = 2t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 3t + \frac{2}{t} \end{cases}$.

- Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 2 - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{3t^4 - 2t^2 - 1}{t^2} = \dfrac{(3t^2+1)(t^2-1)}{t^2} \\ y'(t) = 6t^2 - 7t + 3 - \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{6t^4 - 7t^3 + 3t^2 - 2}{t^2} = \dfrac{(t-1)(6t^3 - t^2 + 2t + 2)}{t^2} \end{cases}$$

Posons $f(t) = 6t^3 - t^2 + 2t + 2$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = 18t^2 - 2t + 2$. Ce trinôme n'a pas de racine réelle donc est de signe constant (celui de 18t² donc positif) sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par le théorème de la bijection, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. On a $f(-1) = -7 < 0$ et $f(0) = 2 > 0$ donc $-1 < \alpha < 0$.

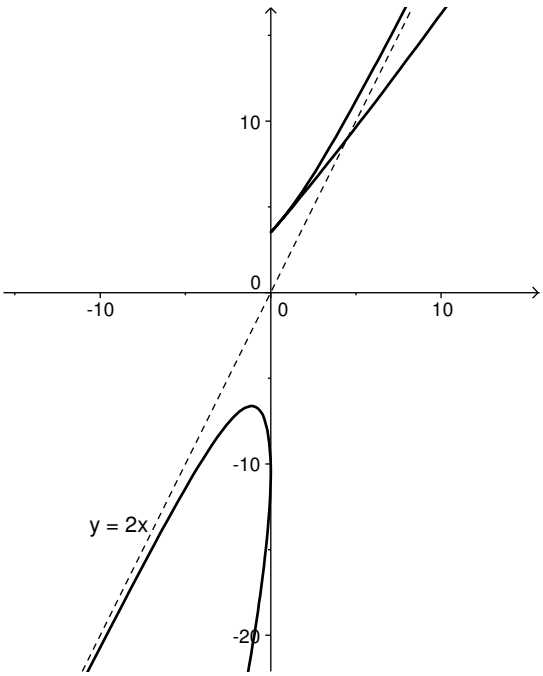
d'où le tableau :

t	$-\infty$		-1		α		0		1		$+\infty$
x'(t)		+	0		–		‖	–	0	+	
x	$-\infty$	↗	0	↘	x(α)	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗		↗	y(α)	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3,5	↗	$+\infty$
y'(t)			+		0	–	‖	–	0	+	

- *Tangentes* :
  - verticale en $t = -1$ et horizontale en $t = \alpha$.
  - Le vecteur tangent en M(t) est colinéaire à $\begin{vmatrix} (3t^2+1)(t+1) \\ 6t^3 - t^2 + 2t + 2 \end{vmatrix}$, ce qui donne $\begin{vmatrix} 8 \\ 9 \end{vmatrix}$ en $t = 1$.

- *Branches infinies* :
  - $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 2$ et $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \left[y(t) - 2x(t)\right] = -\infty$ donc il y a une direction asymptotique $y = 2x$.
  - $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 2$ et $\lim\limits_{t \to 0} \left[y(t) - 2x(t)\right] = 0$ donc $y = 2x$ est asymptote à la courbe.

- On obtient la courbe :



c) $\begin{cases} x(t) = te^t \\ y(t) = \dfrac{1}{t}e^t \end{cases}$.

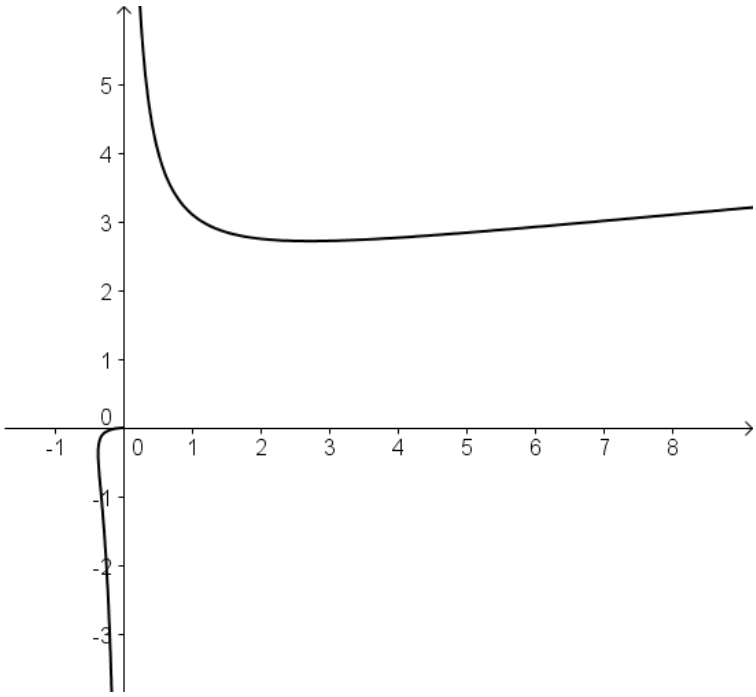
- Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\begin{cases} x'(t) = (t+1)e^t \\ y'(t) = \dfrac{t-1}{t^2}e^t \end{cases}.$$

D'où le tableau :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
x	0	↘	$-e^{-1}$	↗	0 ‖ 0	↗		↗	$+\infty$
y	0	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	

- *Tangentes* :
  - En $t=-1$, $x'(-1)=0$ et $y'(-1)\neq 0$ donc il y a une tangente verticale au point $(-e^{-1};-e^{-1})$.
  - En $t=-1$, $x'(1)\neq 0$ et $y'(1)=0$ donc il y a une tangente horizontale au point $(e;e)$.
- *Branches infinies* :
  - Quand $t\to 0^+$, $x(t)\to 0^+$ et $y(t)\to+\infty$ et quand $t\to 0^-$, $x(t)\to 0^-$ et $y(t)\to-\infty$ donc il y a une asymptote verticale d'équation $x=0$.
  - Quand $t\to-\infty$, $\big(x(t);y(t)\big)\to(0;0)$ donc il n'y a pas d'asymptote.
  - Quand $t\to+\infty$, $x(t)\to+\infty$, $y(t)\to+\infty$ et $\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{1}{t^2}\to 0$ donc il y a une direction asymptotique horizontale.
- On obtient la courbe :



d) $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$.

La fonction x est définie sur $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi;\pi+2k\pi[$ et la fonction y est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc le couple $(x(t);y(t))$ est défini sur D.

- Les fonctions x et y sont 2π-périodiques donc on peut restreindre l'étude à $]0;\pi[$.
- $\forall t\in]0;\pi[$, $\pi-t\in]0;\pi[$ et $\begin{cases} x(\pi-t) = x(t) \\ y(\pi-t) = -y(t) \end{cases}$.

  Donc la courbe est symétrique par rapport à (Ox) et on peut restreindre l'étude à $I = \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Les fonctions x et y sont dérivables sur I avec :

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\cos t}{\sin t}\cos(2t) \\ y'(t) = \cos(2t) \end{cases}.$$

D'où le tableau :

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
x'(t)		+	0	−	
x	$-\infty$	↗	$\frac{1-\ln 2}{2}$	↘	0
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0
y'(t)		+	0	−	

Tangentes :

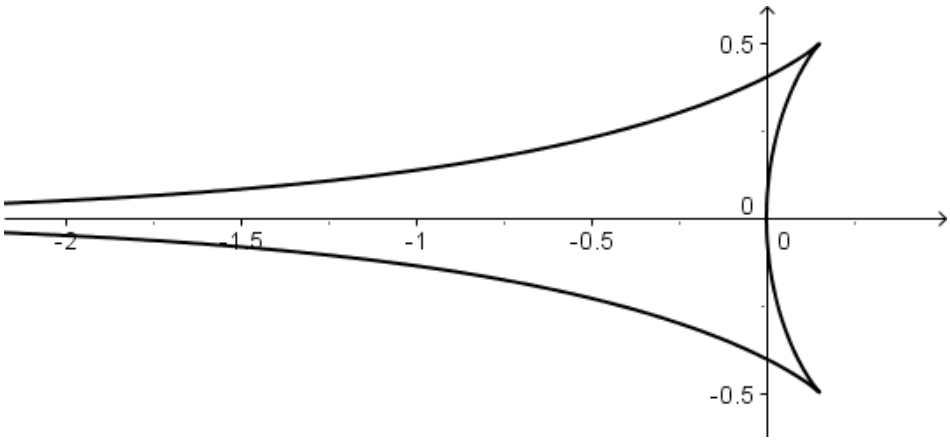
Le vecteur $\vec{T}(x'(t);y'(t))$ est toujours colinéaire à $\vec{u}(\cos t;\sin t)$ donc

- En $t = \pi/4$, il y a une tangente de pente 1 (et comme $\vec{T}(\pi/4) = \vec{0}$, il y a un point stationnaire).
- En $t = \pi/2$, il y a une tangente verticale.

Branches infinies :

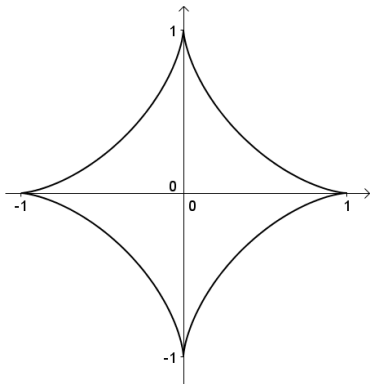
- Quand $t \to 0^+$, $x(t) \to -\infty$ et $y(t) \to 0$ et donc il y a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

On obtient la courbe :



Exercice 2

L'astroïde considérée est la courbe :



1. Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sin t\cos^2 t \\ y'(t) = 3\cos t\sin^2 t \end{cases}.$$

Le vecteur $\vec{T}\left(x'(t);y'(t)\right)$ est toujours colinéaire à $\vec{u}\left(-\cos t;\sin t\right)$ donc une équation de la tangente T_t à Γ eu point M(t) est de la forme $x\sin t + y\cos t + c = 0$. Comme M(t) appartient à cette tangente, on a :

$$\cos^3 t\sin t + \sin^3 t\cos t + c = 0 \iff c = -(\cos^3 t\sin t + \sin^3 t\cos t) = -\cos t\sin t.$$

Donc une équation de T_t est $x\sin t + y\cos t = \cos t\sin t$ et :

- Si $t = 0$ ou π, la tangente est (Ox) donc A n'est pas défini.
- Si $t = \pi/2$ ou $3\pi/2$, la tangente est (Oy) donc B n'est pas défini.

Dans les autres cas :

- $A(t) = T_t \cap (Ox)$ a pour coordonnées $\left(\cos t;0\right)$.
- $B(t) = T_t \cap (Oy)$ a pour coordonnées $\left(0;\sin t\right)$.

Enfin, $AB^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, donc AB est bien constante égale à 1.

2. Pour $\lambda \in]0;1[$, on a $N(t) = \text{bar}\left\{\left(A(t),\lambda\right);\left(B(t),1-\lambda\right)\right\}$ donc :

$$\begin{cases} x_N(t) = \lambda x_A(t) + (1-\lambda)x_B(t) \\ y_N(t) = \lambda y_A(t) + (1-\lambda)y_B(t) \end{cases} \text{soit} \begin{cases} x_N(t) = \lambda\cos t \\ y_N(t) = (1-\lambda)\sin t \end{cases}.$$

C'est la représentation paramétrique d'une ellipse centrée en O et d'axes (Ox) et (Oy) (c'est un cercle pour $\lambda = 0,5$).

3. Reformuler la question demande de trouver les lieu des intersections de tangentes à Γ perpendiculaires.

On a vu qu'un vecteur directeur de la tangente à Γ en M(t) est $\vec{u}\left(-\cos t;\sin t\right)$ donc deux tangentes à G en en M(t) et M(t') sont perpendiculaires si est seulement si $\vec{u}.\vec{u}' = 0$ soit :

$$\cos t\cos t' + \sin t\sin t' = \cos(t-t') = 0 \iff t'-t = \frac{\pi}{2}[\pi].$$

La tangente en M(t) a pour équation $x\sin t + y\cos t = \cos t\sin t$ et celle en M(t') :

$$x\cos t - y\sin t = -\cos t\sin t \text{ pour } t' = t + \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } -x\cos t + y\sin t = -\cos t\sin t \text{ pour } t' = t - \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

Les coordonnées du point d'intersection de ces tangentes sont alors solution de :

$$\begin{cases} x\sin t + y\cos t = \cos t\sin t \\ x\cos t - y\sin t = -\cos t\sin t \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x\sin t + y\cos t = \cos t\sin t \\ x\cos t - y\sin t = \cos t\sin t \end{cases}.$$

Ce qui donne les points $M_1(t)$ et $M_2(t)$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos t\sin t(\sin t - \cos t) \\ y_1(t) = \cos t\sin t(\sin t + \cos t) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_2(t) = \cos t\sin t(\sin t + \cos t) \\ y_2(t) = \cos t\sin t(\cos t - \sin t) \end{cases}.$$

Remarquons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x_2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = x_1(t)$ et $y_2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = y_1(t)$, donc $M_1(t)$ et $M_2(t)$ décrivent la même courbe quand t décrit $\mathbb{R}$.

Finalement, le lieu *C* recherché est la courbe paramétrée par $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t\sin t(\sin t - \cos t) \\ y(t) = \cos t\sin t(\sin t + \cos t) \end{cases}.$$

4. On a $\forall t \in \mathbb{R}$:

- $t + 2\pi \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x(t+2\pi) = x(t) \\ y(t+2\pi) = y(t) \end{cases}$ donc on peut restreindre l'étude à $[-\pi\,;\pi]$.
- $\forall t \in [-\pi\,;\pi]$, $-t \in [-\pi\,;\pi]$ et $\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}$ donc *C* est symétrique par rapport la première bissectrice et on peut restreindre l'étude à $[0\,;\pi]$.
- $\forall t \in [0\,;\pi]$, $\pi - t \in [0\,;\pi]$ et $\begin{cases} x(\pi - t) = -y(t) = -x(-t) \\ y(\pi - t) = -x(t) = -y(-t) \end{cases}$ donc *C* est symétrique par rapport O et on peut restreindre l'étude à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
- $\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{2} - t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\begin{cases} x(\pi/2 - t) = -x(t) \\ y(\pi/2 - t) = y(t) \end{cases}$ donc *C* est symétrique par rapport (Oy) et on peut restreindre l'étude à $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} x'(t) = (\cos t + \sin t)(3\cos t\sin t - 1) \\ y'(t) = (\cos t - \sin t)(1 + 3\cos t\sin t) \end{cases}$$

$\forall t \in \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos t > 0$, $\sin t \geq 0$ et $\cos t \geq \sin t$ donc $y'(t) \geq 0$ et $x'(t)$ est du signe de :

$$3\cos t\sin t - 1 = \frac{3}{2}\sin(2t) - 1 = \frac{3}{2}\left[\sin(2t) - \frac{2}{3}\right] = \frac{3}{2}\left[\sin(2t) - \sin(2\alpha)\right]$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$.

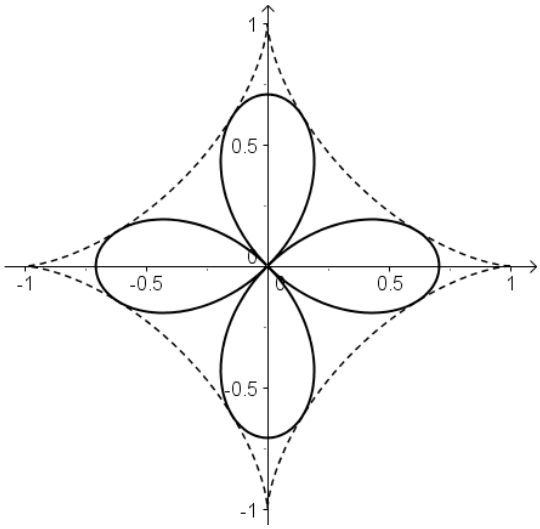
D'où le tableau :

t	0		α		$\pi/4$
x'(t)		$-$	0	$+$	
x	0	↘	x(α)	↗	0
y	0	↗		↗	$\sqrt{2}/2$
y'(t)		$+$		$+$	

Tangentes :

- En $t=0$, $x'(0)=-1$ et $y'(0)=1$ donc il y a une demi-tangente dirigée par $\vec{u}(-1;1)$ au point $(0\,;0)$.
- En $t=\alpha$, $x'(\alpha)=0$ et $y'(\alpha)\neq 0$ donc il y a une tangente verticale au point $\big(x(\alpha);y(\alpha)\big)$.
- En $t=\dfrac{\pi}{4}$, $x'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ donc il y a une tangente horizontale au point $\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

On obtient la courbe :



Pour trouver les points d'intersection de Γ et C, déterminons une équation cartésienne de C.

Remarquons déjà que $\forall\, t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x=\cos t\sin t(\sin t-\cos t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-t\right)\\ y=\cos t\sin t(\sin t+\cos t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}-t\right)\end{cases}.$$

On a alors $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}\sin^2(2t)$ et $x^2-y^2=\dfrac{1}{2}\sin^2(2t)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2t\right)=-\dfrac{1}{2}\sin^3(2t)$ donc :

$$2(x^2+y^2)^3=\frac{1}{4}\sin^6(2t)=(x^2-y^2)^2.$$

Ainsi, si $M(x,y)\in C$, alors $2(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$.

Réciproquement, si $M(x,y)$ est un point tel que $2(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$ en notant (ρ,θ) les coordonnées polaires de M, on a $x^2+y^2=\rho^2$ et $x^2-y^2=\rho^2\cos(2\theta)$.

Donc :

$$2(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2 \iff 2\rho^6=\rho^4\cos^2(2\theta) \iff \rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\cos(2\theta)\right| \text{ ou } \rho=0.$$

Le second cas ($\rho=0$) est englobé dans le premier pour $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Donc, on a $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\theta)$ ou $\rho=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\theta)$ et en posant $\theta=-\frac{\pi}{4}-t$ dans le premier cas et $\theta=\frac{3\pi}{4}-t$ dans le second, on obtient dans les deux cas :

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-t\right) \quad \text{et} \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)\sin\left(\frac{3\pi}{4}-t\right).$$

Ceci prouve que $M\in C$.

Ainsi :

$$M(x,y)\in C \iff 2(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$$

donc cette équation est une équation cartésienne de *C*.

Soit alors $M(x,y)\in\Gamma\cap C$. Il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x=\cos^3 t=\dfrac{1+\cos(2t)}{2}\cos t \\ y=\sin^3 t=\dfrac{1-\cos(2t)}{2}\sin t \\ 2(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2 \end{cases}$$

Ce qui implique que $x^2+y^2=\frac{1+3\cos^2(2t)}{4}$ et $x^2-y^2=\frac{3+\cos^2(2t)}{4}\cos(2t)$. Donc :

$$\left[1+3\cos^2(2t)\right]^3=2\left[3+\cos^2(2t)\right]^2\cos^2(2t).$$

En posant $X=\cos^2(2t)$, on obtient :

$$(3X+1)^3=2X(X+3)^2 \iff 25X^3+15X^2-9X+1=0 \iff (5X-1)^2(X+1)=0$$

Comme $X=\cos^2(2t)\geq 0$, $X+1\neq 0$ et ainsi :

$$X=\cos^2(2t)=\frac{1}{5} \iff \cos(2t)=\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ou } -\frac{\sqrt{5}}{5} \iff t=\beta \text{ ou } -\beta \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

avec $\beta=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\cos\beta=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ et $\sin\beta=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$.

Ainsi, on obtient huit valeurs possibles de t dans $[0\,;2\pi[$: $\beta, \frac{\pi}{2}-\beta, \frac{\pi}{2}+\beta, \pi-\beta, \pi+\beta, \frac{3\pi}{2}-\beta, \frac{3\pi}{2}+\beta$ et $2\pi-\beta$ qui donnent huit points d'intersection :

$M_1\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}^3, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}^3\right)$, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8 obtenus par les diverses symétries par rapport à O, (Ox), (Oy) et $\Delta : y=x$.

Exercice 3

Quitte à opérer une translation, on peut supposer que $\Omega = O$.

Posons $\alpha = (\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ et $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et soit $H(x, y)$ l'orthocentre de OAM.

Remarquons que si $M = A$ ou $M = A'$ (avec A', le point diamétralement opposé à A sur *C*), le triangle est aplati et H n'est pas défini. Donc, on suppose $M \neq A$ et $M \neq A'$.

De plus, avant d'étudier le lieu des points H, nous pouvons remarquer que ce lieu est l'image de celui obtenu pour $\alpha = 0$ par rotation de centre O et d'angle α. Nous prenons donc $\alpha = 0$.

On a alors $A(a, 0)$, $M(a\cos\theta, a\sin\theta)$ et :

- $(OH) \perp (AM)$ donc $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM} = x(a\cos\theta - a) + y(a\sin\theta) = 0$, soit $x\cos\theta + y\sin\theta = x$.
- $(AH) \perp (OM)$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OM} = (x - a)(a\cos\theta) + y(a\sin\theta) = 0$, soit $x\cos\theta + y\sin\theta = a\cos\theta$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ x\cos\theta + y\sin\theta = a\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y\sin\theta = a(1-\cos\theta)\cos\theta \end{cases}$$

On a $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, donc, comme $M \neq A$ et $M \neq A'$, on a $\theta \neq 0\ [\pi]$ et ainsi, $\sin\theta \neq 0$ donc :

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta \\ y(\theta) = a\dfrac{(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases}.$$

Etudions cette courbe pour $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

On a $\begin{cases} x(-\theta) = x(\theta) \\ y(-\theta) = -y(\theta) \end{cases}$ donc la courbe est symétrique par rapport à (Ox) et on peut l'étudier sur $]0, \pi[$.

Les fonctions x et y sont dérivables et $\begin{cases} x'(\theta) = -a\sin\theta \\ y(\theta) = a(1-\cos\theta)\dfrac{\cos^2\theta + \cos\theta - 1}{\sin^2\theta} \end{cases}.$

Le racines de $X^2 + X - 1$ sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,6$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1,6$.

En posant $\theta_o \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$ tel que $\cos\theta_o = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, on a $y(\theta) = a\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}(\cos\theta - \cos\theta_o)(\cos\theta + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$.

On obtient le tableau :

θ	0		θ_o		π
$x'(\theta)$			$-$		
x	a	$\searrow$			$-a$
y	0	$\nearrow$	$y(\theta_o)$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(\theta)$		$+$	0	$-$	

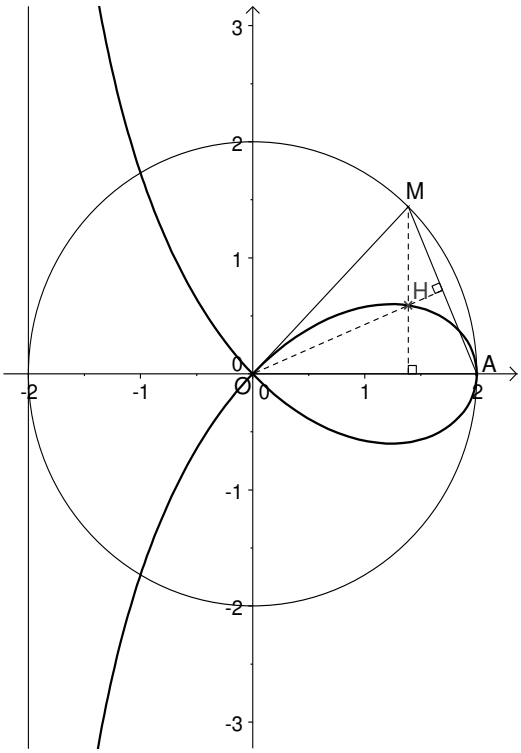
On $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)} = \dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$.

Donc $\lim\limits_{\theta \to 0} y(\theta) = 0$ et la courbe peut être prolongée en 0.

Enfin :

- En $\theta = 0$, il y une tangente verticale et en $\theta = \theta_o$, il y une tangente horizontale ;
- Quand $\theta \to \pi$, il y a une asymptote verticale d'équation $x = -a$.

On obtient la courbe (en gras) :

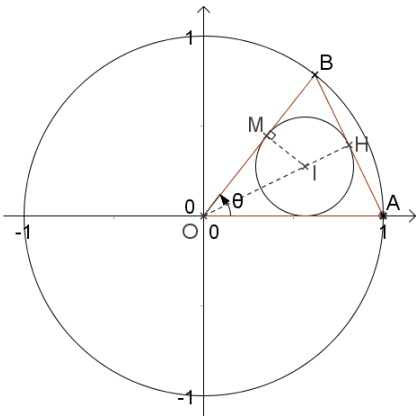


Exercice 4

Choisissons un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$.

Le cercle *C* de centre O et de rayon OA est alors le cercle trigonométrique (de rayon 1).

Soit B, un point quelconque de ce cercle, tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = \theta$ (le coordonnées polaires de B sont alors $(1, \theta)$. Le triangle OAB est un « vrai » triangle pour B différent de A et A', le symétrique de A par rapport à O, c'est-à-dire pour $\theta \neq 0$ et π. Dans ces conditions, appelons I le centre du cercle inscrit dans OAB et $M(\theta)$, le point de contact du cercle inscrit et de la droite (OB). Le point $M(\theta)$ est aussi le projeté orthogonal de I sur (OB) et comme le cercle est inscrit, $M(\theta)$ est sur le segment [OB]. On a donc $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = \theta$.



Par symétrie évidente de la figure, $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à (Ox) donc la courbe recherchée sera symétrique par rapport à (Ox) et on peut prendre $\theta \in]0\,;\pi[$.

Comme A et B sont sur un cercle de centre O, OAB est isocèle en O donc la bissectrice (OI) issue de O est aussi la médiatrice de [AB]. Posons $H = (OI) \cap (AB)$.

On a alors :

- H est sur le cercle inscrit dans OAB donc $IH = IM$.
- I est sur [OH] donc OH = OI + IH.
- (OI) = (OH) est la bissectrice de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\theta}{2}$.
- OHA est rectangle en H donc $OH = OA\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}) = \cos\frac{\theta}{2}$ (avec OA = 1).
- OIM est rectangle en M donc $OM = OI\cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = OI\cos\frac{\theta}{2}$ et $IM = OI\sin(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = OI\sin\frac{\theta}{2}$.

De tout cela, on tire $OH = OI + IM = OI\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$ et :

$$OM = OI\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}} = 1 - \sin\frac{\theta}{2}.$$

Ainsi, les coordonnées polaires de $M(\theta)$ pour $\theta \in]0\,;\pi[$ sont $\left(\theta\,; 1-\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

La courbe recherchée est paramétrée pour $\theta \in]0\,;\pi[$ par :

$$\rho(\theta) = 1 - \sin\frac{\theta}{2}.$$

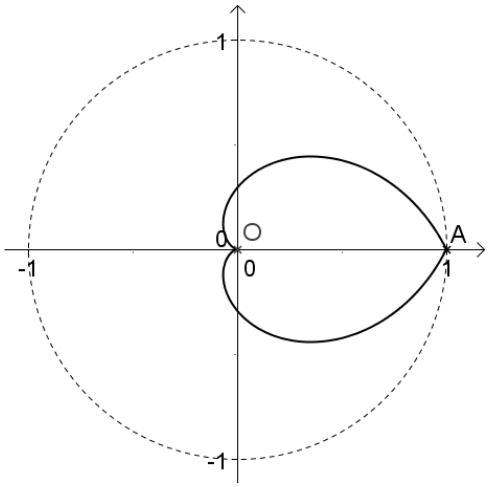
Cette fonction est prolongeable sur $[0\,;\pi]$.

La fonction ρ est définie et dérivable sur $\theta \in [0\,;\pi]$ et $\rho'(\theta) = -\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \leq 0$ donc ρ est décroissante sur $[0\,;\pi]$ de $\rho(0) = 1$ à $\rho(\pi) = 0$.

Tangentes : Un vecteur directeur de la tangente en $M(\theta)$ est $\vec{T}(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta$ (quand il est non nul).

- En 0, on obtient une tangente dirigée par $\vec{i} - 2\vec{j}$.
- En π, on obtient une tangente horizontale (car $\vec{T}(\theta)$ est colinéaire à $\cos\frac{\pi-\theta}{4}\vec{u}_\theta - 2\sin\frac{\pi-\theta}{4}\vec{v}_\theta$).

On obtient la courbe complétée par symétrie :



Exercice 5

a) Pour x = 0, on a $y^3 = 0$, soit y = 0. Donc, $\underline{C \cap (Ox) = \{O\}}$.

b) Si $t = \dfrac{y}{x}$, on a $y = tx$ donc $x^3 + y^3 - xy = 0$ devient $x^3 + t^3x^3 - tx^2 = 0$ soit (avec $x \neq 0$) :

$$x = \frac{t}{1+t^3} \quad \text{et} \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

c) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \\ y'(t) = \dfrac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} \end{cases}.$$

On a le tableau :

t	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{0,5}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'(t)		+	‖	+		+	0	−		−	
x	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	↘	0
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	↗	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	0
y'(t)		−	‖	−	0	+		+	0	−	

Tangentes :

- En $t = \sqrt[3]{0,5}$, il y a une tangente verticale ;
- En $t = 0$ et en $t = \sqrt[3]{2}$, il y a des tangentes horizontales ;
- Quand $t \to \pm\infty$, $M(t) \to O$ et $\dfrac{x'(t)}{y'(t)} \to 0$ donc, on a une pseudo tangente verticale.

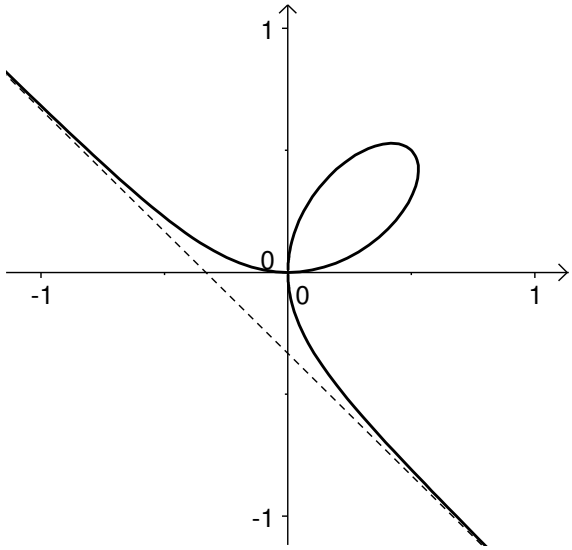
Branches infinies :

$$\lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -1} t = -1$$

$$\lim_{t \to -1} \left[y(t) + x(t)\right] = \lim_{t \to -1} \frac{t+t^2}{1+t^3} = \lim_{t \to -1} \frac{t}{1-t+t^2} = -\frac{1}{3}.$$

Il y a donc une asymptote oblique d'équation $y + x = -\dfrac{1}{3}$ quand $t \to -1$.

On obtient la courbe :



Exercice 6

Il clair que si une droite est à la fois tangente et normale à une courbe, ce n'est pas au même point.

Les fonctions x et y sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} x(t) = 6t \\ y(t) = 12t^2 \end{cases}$.

Un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point M(t) est donc $\vec{T}(1\,;2t)$.

Supposons qu'il existe une droite D qui soit tangente en un point M(t) et normale à la courbe.

Alors, D doit recouper la courbe en un point N(t') et la tangente en ce point doit être perpendiculaire à D.

Un vecteur directeur de D est $\vec{T}(1\,;2t)$ et D passe par M(t) de coordonnées $\left(3t^2;4t^3\right)$ donc une équation de D est $y = 2t(x-3t^2)+4t^3$, soit :

$$y = 2t(x-t^2).$$

Alors, on a :

$$\begin{cases} x_N = 3t'^2 \\ y_N = 4t'^3 \\ y_N = 2t(x_N - t^2) \end{cases} \Rightarrow \quad 2t'^3 = t(3t'^2 - t^2).$$

De plus, un vecteur directeur de la tangente à la courbe en N(t') est $\vec{T'}(1\,;2t')$ et comme cette tangente est perpendiculaire à D, on a :

$$\vec{T}.\vec{T'} = 1 + 4tt' = 0.$$

Les réels t et t' sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} 2t'^3 = t(3t'^2 - t^2) \\ 4tt' + 1 = 0 \end{cases}.$$

Comme $tt' \neq 0$, on a $t \neq 0$ et on peut écrire $t' = -\dfrac{1}{4t}$. La première équation devient alors :

$$-\frac{1}{32t^3} = t\left(\frac{3}{16t^2} - t^2\right) \quad \Rightarrow \quad 32t^6 - 6t^2 - 1 = 0.$$

Si on pose $X = 2t^2$, l'équation devient $4X^3 - 3X - 1 = 0$ dont 1 est clairement solution.

On a alors :

$$4X^3 - 3X - 1 = (X-1)(4X^2 + 4X + 1) = (X-1)(2X+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 1 \text{ ou } X = -\frac{1}{2}.$$

La deuxième solution est exclue car $X = 2t^2 > 0$ donc $2t^2 = 1$ et :

$$\boxed{t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

Réciproquement, on vérifie que les tangentes à la courbe en $M_1(\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ lui sont normales.

On peut déjà remarquer que pour tout t, $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc la courbe est symétrique par rapport à (Ox).

Alors, si on vérifie la propriété pour M_1, elle sera aussi vraie pour M_2.

D'après ce qui précède, une équation de la tangente en M_1 est $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x-1)$.

Chercher les intersections de cette tangente avec la courbe revient à cherche t tel que $4t^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(6t^2 - 1)$ soit :

$$2(\sqrt{2}t)^3 - 3(\sqrt{2}t)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(\sqrt{2}t)^3 - 3(\sqrt{2}t)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\sqrt{2}t+1)(\sqrt{2}t-1)^2 = 0.$$

La solution $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ correspond au point initial ; l'autre solution est $t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Au point $N(-\frac{1}{2\sqrt{2}})$ de la courbe la tangente admet pour vecteur directeur $\vec{t}(1\,;-\frac{1}{\sqrt{2}})$ qui est bien orthogonal à $\vec{T}(1\,;\sqrt{2})$ directeur de la tangente en M_1.

Ainsi, la tangente la courbe en $M_1(\frac{1}{\sqrt{2}})$ lui est normale en $N(-\frac{1}{2\sqrt{2}})$.

Exercice 7

Soit $M(\text{ch}t, \text{sh}t)$ un point de *H*. On cherche à construire un cercle de centre $\Omega(a,b)$ passant par O et tangent à *H* en M, c'est-à-dire tel que la tangente à *H* en M soit aussi tangente au cercle.

Un tel cercle vérifie ces conditions si et seulement si $\Omega O = \Omega M$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ est colinéaire à $\vec{N}$ où $\vec{N}(\text{ch}t, -\text{sh}t)$ est un vecteur normal à la tangente à *H* en M (de vecteur directeur $\vec{T}(\text{sh}t, \text{ch}t)$). Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} O\Omega^2 = M\Omega^2 \\ \overrightarrow{M\Omega} = k\vec{N} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ce qui se récrit :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (a - \text{ch}t)^2 + (b - \text{sh}t)^2 \\ a - \text{ch}t = k\,\text{ch}t \\ b - \text{sh}t = -k\,\text{sh}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a\,\text{ch}t + 2b\,\text{sh}t = \text{ch}^2t + \text{sh}^2t \\ a = (k+1)\,\text{ch}t \\ b = (1-k)\,\text{sh}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2}(\text{ch}^2t + \text{sh}^2t) \\ a = (k+1)\,\text{ch}t \\ b = (1-k)\,\text{sh}t \end{cases}$$

Et finalement, on obtient :

$$\begin{cases} a(t) = (\frac{1}{2} - sh^2 t)\,ch\,t \\ b(t) = (\frac{1}{2} + ch^2 t)\,sh\,t \end{cases}$$

Les fonctions a et b sont définies sur $\mathbb{R}$.

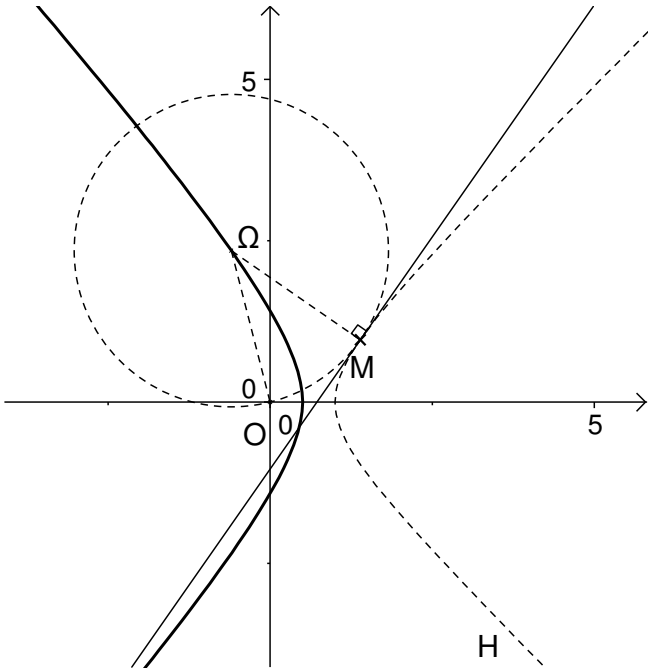
- a est paire et b est impaire donc la courbe décrite par Ω est symétrique par rapport à (Ox) et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.
- Les fonctions a et b sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} a'(t) = 3(\frac{1}{2} - ch^2 t)\,sh\,t \\ b'(t) = 3(\frac{1}{2} + sh^2 t)\,ch\,t \end{cases}.$$

Sur $\mathbb{R}_+$, $a'(t) \leq 0$ et $b'(t) > 0$.

Et a est décroissante de $\frac{1}{2}$ à $-\infty$ et b est croissante de 0 à $+\infty$.

On obtient la courbe :



Exercice 8

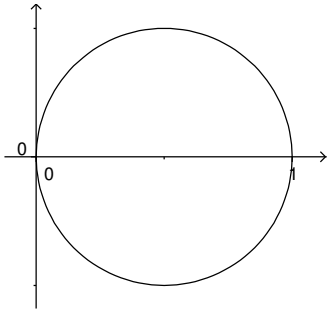
a) $\rho = \cos\theta$.

- ρ est définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique donc on peut l'étudier sur $[-\pi;\pi]$.
- $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc la courbe est symétrique par rapport à (Ox) et on peut l'étudier sur $[0;\pi]$.
- $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$. Ceci redonne une symétrie par rapport à (Ox), donc la courbe est parcourue deux fois quand θ décrit $[-\pi;\pi]$ et on peut l'étudier sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Sur cet intervalle, ρ décroit de 1 à 0.

$\rho'(\theta) = -\sin\theta$ donc $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = -\sin\theta\vec{u}_\theta + \cos\theta\vec{v}_\theta = \vec{u}_{2\theta+\frac{\pi}{2}}$ donc il y a une tangente verticale pour $\theta = 0$ et une tangente horizontale pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

On obtient la courbe :



Cette courbe a l'air d'être un cercle et elle l'est ! En effet, on a :

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \\ y(\theta) = \cos\theta\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

Donc $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ qui est l'équation d'un cercle de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

b) $\rho(\theta) = \dfrac{\tan\theta}{1-2\cos\theta}$. ρ est définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}+2k\pi, -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$ et :

- $\forall\,\theta\in D$, $\theta+2\pi\in D$ et $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$ donc on peut se restreindre à $[-\pi\,;\pi]\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$;
- $\forall\,\theta\in[-\pi\,;\pi]\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$, $-\theta\in[-\pi\,;\pi]\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ et $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ donc la courbe est symétrique par rapport à (Oy) et on peut se restreindre à $[0\,;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$.

La fonction ρ est dérivable sur D et $\rho'(\theta) = \dfrac{2\cos^3\theta - 4\cos\theta + 1}{\cos^2\theta(1-2\cos\theta)^2}$.

En posant $h(x) = 2x^3 - 4x + 1$, on a $h'(x) = 6x^2 - 4$ et le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2/3}$		$\sqrt{2/3}$		$+\infty$
h	$-\infty$	↗	$h(-\sqrt{2/3})$	↘	$h(\sqrt{2/3})$	↗	$+\infty$

On a $h(-\sqrt{2/3}) = 1 + \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} > 0$ et $h(\sqrt{2/3}) = 1 - \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} < 0$, donc le théorème de la bijection donne trois racines a, b et c pour h, valant environ – 1,53 ; 0,26 et 1,27. Alors :

$$2\cos^3\theta - 4\cos\theta + 1 = 2(\cos\theta - a)(\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\theta - c)$$

avec $\cos\theta - a > 0$, $\cos\theta - c < 0$ et $b = \cos\alpha \approx 0,26$ soit $\alpha \approx 1,3 \in \left]\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On obtient le tableau :

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		α		$\frac{\pi}{2}$		π
$\rho'(\theta)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
ρ	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\rho(\alpha)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

<u>Branches infinies</u> :

On a $x(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1-2\cos\theta}$ et $y(\theta)=\dfrac{\sin\theta\tan\theta}{1-2\cos\theta}$.

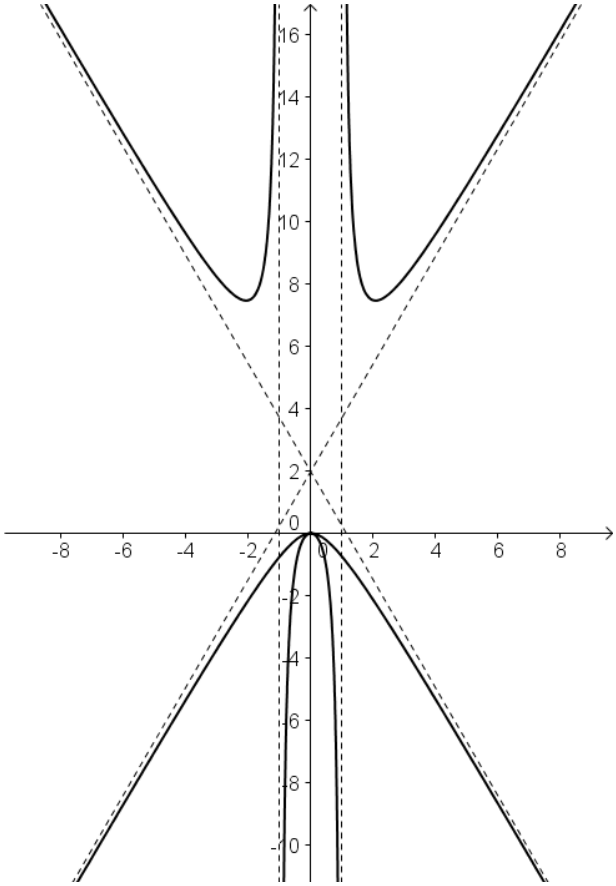
- En $\dfrac{\pi}{3}$: $\lim\limits_{\theta\to\pi/3}\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ et $y(\theta)-\sqrt{3}x(\theta)=\tan\theta\dfrac{\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta}{1-2\cos\theta}=\tan\theta\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

  Donc $\lim\limits_{\theta\to\pi/3}\left(y(\theta)-\sqrt{3}x(\theta)\right)=2$ et il y a une asymptote oblique d'équation $y=\sqrt{3}x+2$.

- En $\dfrac{\pi}{2}$: $\lim\limits_{\theta\to\pi/2}x(\theta)=1$ et $\lim\limits_{\theta\to\pi/2}y(\theta)=\pm\infty$.

  Donc il y a une asymptote verticale d'équation $x=1$.

On obtient la courbe complétée par symétrie :

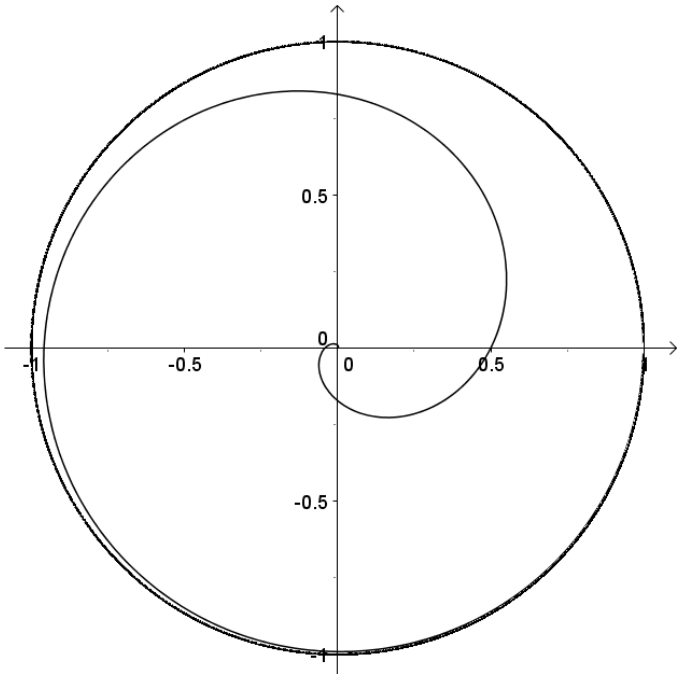


c) $\rho(\theta)=\dfrac{e^{\theta}}{1+e^{\theta}}$. ρ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\rho'(\theta)=\dfrac{e^{\theta}}{(1+e^{\theta})^2}>0$ donc ρ est strictement croissante.

- $\lim\limits_{\theta\to-\infty}\rho(\theta)=0$ donc $\lim\limits_{\theta\to-\infty}M(\theta)=O$ (l'origine du repère).

- $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = 1$ donc le cercle de centre O et de rayon 1 est asymptote.

On obtient la courbe :



d) $\begin{cases} \rho(t) = t^2 + 1 \\ \theta(t) = \arctan t \end{cases}$.

On a $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ et $t = \tan\theta$ donc :

$$\rho(\theta) = 1 + \tan^2\theta \text{ définie sur } \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

- La fonction ρ est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à (Ox). On peut étudier sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
- On a $\rho'(\theta) = 2(1+\tan^2\theta)\tan\theta \geq 0$ sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc ρ est croissante.
- *Tangente* :

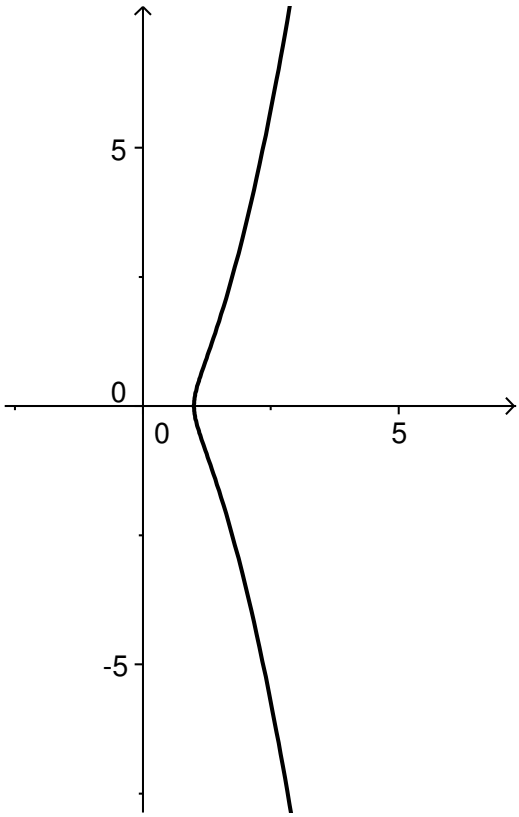
  En $\theta = 0$, $\rho(0) = 1$ et la tangente est dirigée par $\vec{v}_0 = \vec{j}$ donc elle est verticale.
- *Branche infinie* :

  On a $\lim\limits_{\theta \to \pi/2} \rho(\theta) = +\infty$ donc il y a une branche infinie en $\dfrac{\pi}{2}$.

  $$\lim_{\theta \to \pi/2} \frac{x(\theta)}{y(\theta)} = \lim_{\theta \to \pi/2} \operatorname{cotan}\theta = 0.$$

  Donc, il y a une direction asymptotique verticale mais :

  $$\lim_{\theta \to \pi/2} x(\theta) = \lim_{\theta \to \pi/2} (1+\tan^2\theta)\cos\theta = \lim_{\theta \to \pi/2}\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) = +\infty.$$

  Donc, il n'y a pas d'asymptote verticale.

- On obtient la courbe :