DS de Mathématiques n° 2

3 heures

Calculatrices interdites

Exercice 1

Dans le plan orienté, on considère deux cercles *C* et *C'* de centres respectifs Ω et Ω' tels que $\Omega \neq \Omega'$ et de rayons respectifs R et R' tel que $R > R'$.

On pose $a = \Omega\Omega'$, $\vec{I} = \dfrac{1}{\Omega\Omega'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ et on définit le vecteur $\vec{J}$ tel que $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ soit un repère orthonormé direct.

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de tangentes communes à *C* et *C'*.

Soit A un point de *C* tel que $(\vec{I}, \overrightarrow{\Omega A}) = \alpha$. On appelle τ la tangente à *C* en A.

1) Déterminer une équation cartésienne de τ, puis l'équation polaire de τ et enfin montrer qu'un système d'équations paramétriques de τ est :
$$\begin{cases} x = R\cos\alpha - Rt\sin\alpha \\ y = R\sin\alpha + Rt\cos\alpha \end{cases}$$
2) Prouver que τ est commune à *C* et *C'* si et seulement si $(a\cos\alpha - R)^2 = R'^2$.
3) Rappeler les différentes positions relatives possibles de *C* et *C'* suivant les valeurs de a, R et R'.
4) Déterminer alors le nombre de tangentes communes à *C* et *C'* dans chacun des cas mentionnés dans la question précédente. Dans chaque cas, faire une figure avec les deux cercles et les tangentes communes.
5) *Application* : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les cercles *C* de centre $\Omega(1;-1)$ et de rayon 2 et *C'* de centre $\Omega'(1;1)$ et de rayon 1.
Déterminer le nombre de tangentes communes à *C* et *C'* ainsi qu'une équation cartésienne de chacune de ces tangentes.

Exercice 2

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1) a. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?

   b. Montrer que si $f(0) = 0$, la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   c. Montrer que f est paire et que $f'(0) = 0$.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$. En déduire que f est solution de l'équation différentielle (E) : $y'' - ay = 0$ où $a = f''(0)$.
3) Résoudre (E) en discutant suivant le signe de a.
4) En déduire toutes les fonctions f vérifiant les hypothèses.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1-x^2)y'-xy=1.$$

1) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
2) Démontrer qu'il existe une unique solution sur $]-1;1[$ prenant la valeur 0 en $x=0$. On appelle f cette solution.
3) Déterminer les limites de f en – 1 et 1.
4) On considère la fonction φ définie sur $[0;1[$ par :

$$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x.$$

   Etudier les variations de φ.
5) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative.
6) Soit $\theta\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$. Simplifier autant que possible l'expression de $f(\sin\theta)$ en discutant suivant l'intervalle auquel appartient θ.
7) Démontrer que $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2-1}}=1$.
8) En déduire que la seule solution de (E) continue sur $[1;+\infty[$ serait la fonction :

$$x\mapsto\begin{cases}-\dfrac{\operatorname{argch} x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x\in\,]1;+\infty[\\ -1 & \text{si } x=1\end{cases}$$

   Expliquer le conditionnel dans la formulation de la question.