

## TD du Chapitre 5 : Courbes paramétrées

Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

### Exercice 1

Etudier les courbes paramétrées suivantes :

$$a) \begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}.$$

$$b) \begin{cases} x(t) = t^3 - 2t + \frac{1}{t} \\ y(t) = 2t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 3t + \frac{2}{t} \end{cases}.$$

$$c) \begin{cases} x(t) = te^t \\ y(t) = \frac{1}{t}e^t \end{cases}. \text{ Etudier avec précision les branches infinies.}$$

$$d) \begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}.$$

### Exercice 2

On considère l'astroïde  $\Gamma : M(t) \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$ .

1. Soit  $A(t)$  et  $B(t)$  les intersections de la tangente en  $M(t)$  avec les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ . Quelles sont les valeurs de  $t$  pour lesquelles ces points sont définis ? Préciser leurs coordonnées. Montrer que la distance  $AB$  est constante.
2. Soit  $\lambda \in ]0; 1[$ . On pose  $N(t) = \text{bar}\{(A(t), \lambda); (B(t), 1 - \lambda)\}$ . Quelle est la courbe décrite par  $N$  ?
3. Trouver le lieu  $C$  des points d'où on peut mener deux tangentes à  $\Gamma$  orthogonales.  $C$  est appelée courbe orthoptique à  $\Gamma$ .
4. Etudier et tracer  $C$  sur la même figure que  $\Gamma$ . Déterminer leurs points d'intersection.

### Exercice 3

Soient  $C$  un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $a$  et  $A$  un point du cercle. Déterminer le lieu de l'orthocentre  $H$  du triangle  $\Omega AM$  lorsque  $M$  décrit  $C$ . La courbe obtenue est appelée une strophoïde droite.

### Exercice 4

Un point  $B$  décrit un cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ . Déterminer et représenter le lieu de  $M$ , point de contact du cercle inscrit dans le triangle  $OAB$  et de la droite  $(OB)$ .

**Exercice 5**

Soit  $C$  la courbe du plan d'équation cartésienne  $x^3 + y^3 - xy = 0$ .

- Déterminer l'intersection de  $C$  et  $(Oy)$
- Pour  $x \neq 0$ , on pose  $t = \frac{y}{x}$ . Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $t$ .
- Etudier et construire  $C$ .

**Exercice 6**

On considère la courbe définie par  $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 4t^3 \end{cases}$ . Quelles sont les tangentes qui sont également des normales ?

**Exercice 7**

On considère l'arc paramétré  $H$  défini par  $\begin{cases} x(t) = \operatorname{cht} \\ y(t) = \operatorname{sht} \end{cases}$ . Déterminer le lieu des centres des cercles passant par  $O$  et tangents à  $H$  (deux courbes sont tangentes en un point si elles ont la même tangente en ce point).

**Exercice 8**

Etudier les courbes paramétrées suivantes :

- $\rho = \cos \theta$
- $\rho = \frac{\tan \theta}{1 - 2 \cos \theta}$
- $\rho = \frac{e^\theta}{1 + e^\theta}$
- $\begin{cases} \rho(t) = t^2 + 1 \\ \theta(t) = \arctan t \end{cases}$

