

TD du Chapitre 7 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Soient $\vec{u}(\cos a, \cos b, \cos c)$, $\vec{v}(\sin a, \sin b, \sin c)$ et $\vec{w}(\sin(a+d), \sin(b+d), \sin(c+d))$ où a, b, c et d sont quatre réels fixés. Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?

Exercice 2

Un avion doit effectuer une liaison entre une ville P et une ville M, en prenant le chemin le plus court. On souhaite calculer l'angle entre la direction du Nord et celle que doit prendre l'avion au départ de P, appelée azimut. Les directions sont prises tangentiellement à la surface de la Terre.

On appelle R le rayon terrestre. Un point de la surface de la Terre est repéré par sa latitude ψ , mesurée par rapport à l'équateur (positive dans l'hémisphère nord) et sa longitude θ , mesurée par rapport au méridien de Greenwich (positive à l'est de ce méridien).

On appelle ψ_1 et θ_1 la latitude et la longitude de P, et ψ_2 et θ_2 celles de M.

Enfin, on note :

- $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère orthonormé cartésien direct correspondant à ce système de coordonnées sphériques (O étant le centre de la Terre) .
- $R' = (O, \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{k})$ le repère orthonormé direct tel que $\vec{u}_1 = \cos \theta_1 \vec{i} + \sin \theta_1 \vec{j}$.
- $R_p = (P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le repère orthonormé direct dit « local à P » tel que \vec{u} et \vec{v} sont tangents à la surface de la Terre, \vec{u} est dirigé vers le nord et \vec{v} vers l'ouest (\vec{w} est donc colinéaire et de même sens que \overrightarrow{OP}).

- 1) Calculer les coordonnées cartésiennes de P et de M dans R, R' puis R_p .
- 2) On note α l'azimut de la direction à prendre au départ de P. Calculer $\tan \alpha$, puis une valeur de α à π près.
- 3) On donne ci-dessous les coordonnées de Paris et la Mecque. Quand on se trouve à Paris, dans quelle direction se trouve la Mecque ?

	longitude	latitude
Paris	2° E	49° N
la Mecque	40° E	21° N

- 4) Sachant que $R = 6400$ km, quelle est la distance à vol d'oiseau entre Paris et la Mecque ?

Exercice 3

On se place dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour tout point M, on appelle M' son projeté orthogonal sur (xOy) et M'' l'image de M' par la rotation plane de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans (xOy).

Déterminer les points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MM''} = \vec{u}$ avec $\vec{u}(1,1,1)$.

Exercice 4

Soit \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{z} quatre vecteurs de l'espace.

- 1) Simplifier $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}$ quand \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.
- 2) Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$.
- 3) A-t-on $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$? Autrement dit, le produit vectoriel est-il associatif ?
- 4) Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{z}) - (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
- 5) Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]\vec{w} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{z}$ où $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le produit mixte.

Exercice 5

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs et A, B et C trois points de l'espace distincts deux à deux.

- 1) Résoudre $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$ d'inconnue vectorielle \vec{x} .
- 2) Déterminer l'ensemble des points M tels que :
 - a. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.
 - b. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
 - c. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{u}$
 - d. $(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}) \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.
 - e. $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge \overrightarrow{MA} = \vec{0}$.

Exercice 6

Exprimer $\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u})$ en fonction de $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 7

Calculer les déterminants suivants sous la forme la plus factorisée possible :

$$a. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & b+c & (1+b^2)(1+c^2) \\ 1 & a+c & (1+a^2)(1+c^2) \\ 1 & a+b & (1+a^2)(1+b^2) \end{vmatrix}$$

$$b. \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b+c & (1+b^2)(1+c^2) \\ b & a+c & (1+a^2)(1+c^2) \\ c & a+b & (1+a^2)(1+b^2) \end{vmatrix}$$

$$c. \Delta_3 = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (c+b)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 8

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 2)$, $C(0, 1, -2)$;

- les droites $D_1 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t + 1 \\ z = t - 1 \end{cases}$, $D_2 : \begin{cases} x = 3t' + 1 \\ y = -2t' \\ z = 5t' + 3 \end{cases}$;

- les plans $P_1 : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda + \mu \\ z = 4 - \lambda - 2\mu \end{cases}$, $P_2 : 2x - y + 3z = 1$ et $P_3 : x + 2z - 4 = 0$.

- 1) Donner une équation cartésienne de P_1 .
- 2) Justifier que P_2 et P_3 ne sont pas parallèles et donner une représentation paramétrique de $P_2 \cap P_3$.
- 3) Justifier que (ABC) est un plan et en donner une équation cartésienne.
- 4) Déterminer l'intersection de D_1 et P_2 .
- 5) Donner une équation cartésienne du plan Q contenant D_1 et tel que D_2 soit parallèle à Q .
- 6) Déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
- 7) Déterminer $(AB) \cap P_2$.
- 8) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A , parallèle à P_2 et coupant D_1 .
- 9) Donner une équation cartésienne de plan passant par C et contenant D_1 .
- 10) Donner des équations cartésiennes de la médiatrice de $[BC]$ dans le plan (ABC) .

Exercice 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on appelle C le cercle d'équations $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \end{cases}$

et S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z = 0$.

- 1) Vérifier que C est bien un cercle. Donner son centre et son rayon.
- 2) Déterminer les intersection de C avec les « plans de coordonnées ».
- 3) Quelles sont les tangentes à C rencontrant l'axe (Oz) ?
- 4) Montrer que l'ensemble des points M de C de coordonnées (x, y, z) vérifiant $xyz = 0$ est constitué des sommets d'un hexagone régulier (donc plan...)
- 5) Déterminer le centre et le rayon de S .
- 6) Donner une équation des plans tangents à S aux points d'intersection de S et (Ox) .
- 7) Déterminer $S \cap C$.

Exercice 10

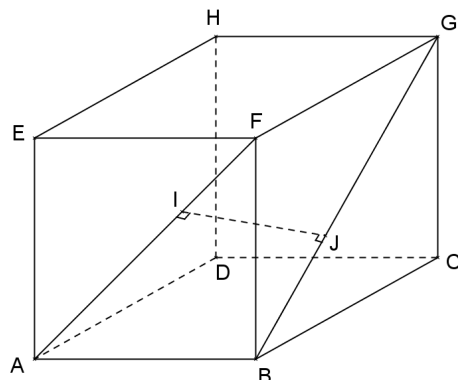
Dans une repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les quatre points $A(3, 2, 1)$, $B(-1, -1, 1)$, $C(3, -1, 1)$ et $D(-1, -5, -1)$.

1. Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. Calculer le volume V du tétraèdre ABCD.
3. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que le volume de ABCM soit égal à V .
4. Calculer la distance d de A au plan (BCD).
5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que la distance de M à (BCD) soit égal à d .

Exercice 11

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 tel que sur la figure ci-dessous.

On appelle Δ , la perpendiculaire commune à (AF) et (BG), I le point d'intersection de Δ et (AF) et J celui de Δ et (BG).



On pose $\overline{AI} = \lambda \overline{AF}$ et $\overline{BJ} = \mu \overline{BG}$.

- 1) Déterminer λ et μ , puis les coordonnées de I et J dans le repère $(B, \overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BF})$.
- 2) On pose $K = (FJ) \cap (BC)$ et $L = (BI) \cap (EF)$. Déterminer les coordonnées de K et L et en déduire une construction simple de Δ .

