TD du Chapitre 8 : Ensembles et applications

ENSEMBLES :

Exercice 1

Soient E un ensemble et F et G deux parties de E.

a. A-t-on $\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)$? $\mathscr{P}(F\cap G)=\mathscr{P}(F)\cap\mathscr{P}(G)$?

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour que $\mathscr{P}(F\cup G)=\mathscr{P}(E)$.

c. Même question pour $\mathscr{P}(F)\cup\mathscr{P}(G)=\mathscr{P}(E)$.

Exercice 2

Soit $E=\{a;b\}$. Ecrire $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

☺ *Il contient 16 éléments…*

Exercice 3

Soient E et F deux ensembles. Montrer que E et F sont égaux si et seulement si $E\cup F=E\cap F$.

Exercice 4

Soient A et B deux ensembles. On définit la différence symétrique de A et B par $A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

a. Montrer que $A\,\Delta\,B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

b. Montrer que $A\,\Delta\,B=A\cap B\ \Rightarrow\ A=B=\varnothing$.

Exercice 5

Soient a et b deux réels. Simplifier au maximum :

$$E=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right],\quad F=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[,\quad G=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right],\quad H=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]a-\frac{1}{n};b+\frac{1}{n}\right[.$$

APPLICATIONS :

Exercice 6

Soit une application $f:E\to F$.

a. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A\subset E,\ f^{-1}\left(f(A)\right)=A$.

b. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall B\subset F,\ f\left(f^{-1}(B)\right)=B$.

Exercice 7

Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et donner f^{-1}.

Exercice 8

On rappelle que $\forall r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\text{PGCD}(p,q) = 1$ et $r = \dfrac{p}{q}$.

Avec les notations ci-dessus, soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} ; r \mapsto \dfrac{p+q}{p^2+q^2}$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 9

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On note $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ l'application définie par $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$. A quelle condition sur A et B, cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Relations d'ordre :

Exercice 10

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\ll$ par :

$$(x,y) \ll (x',y') \quad \Leftrightarrow \quad x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \le y').$$

1) Vérifier que $\ll$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2) Dessiner l'ensemble des majorants et des minorants d'un couple (a,b).
3) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2 + y^2 \le 1\}$. Déterminer sup(A).

Exercice 11

Soient E et F deux ensembles ordonnés et f une application de E dans F.

1) Montrer que si f est croissante et injective, alors elle est strictement croissante.
2) Montrer que si l'ordre de E est total et f est strictement croissante, alors f est injective.
3) Donner un contre-exemple dans le cas où l'ordre de E est seulement partiel.

Exercice 12

Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' deux cercles du plan de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R'. On dit que $\mathscr{C}$ est inférieur à $\mathscr{C}$' si $OO' \le R' - R$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total dans l'ensemble des cercles du plan.

Exercice 13

Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ croissante. On pose $A = \{x \in [0;1] \setminus f(x) \le x\}$.

1) Prouver que A n'est pas vide et que $f(A) \subset A$.
2) Soit $a = \inf A$. Montrer que f(a) minore A, puis que $f(a) = a$.