

Corrigé du DM n° 4

Exercice 1

1) Si A, B, C et D ne sont pas coplanaires, ils ne sont pas alignés.

Supposons que trois points quelconques parmi A, B, C et D soient alignés, par exemple A, B et C. Alors, A, B et D ne le sont pas et (ABD) est un plan contenant la droite (AB). Mais, C est sur (AB) donc dans le plan (ABD), ce qui est absurde car les quatre points ne sont pas coplanaires. Ainsi :

Trois points quelconques parmi A, B, C et D ne sont pas alignés.

2) Soit M un point de Δ .

Si $M = O$, alors on a clairement $AM = BM = CM$ car O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Si $M \neq O$, $\Delta = (OM)$ donc les triangles AOM, BOM et COM sont rectangles en O. Le théorème de Pythagore donne alors :

$$AM^2 = AO^2 + OM^2, \quad BM^2 = BO^2 + OM^2 \quad \text{et} \quad CM^2 = CO^2 + OM^2.$$

Or, $AO = BO = CO$, donc $AM^2 = BM^2 = CM^2$ et ainsi, M est équidistant de A, B et C.

Réciproquement, soit un point M équidistant de A, B et C.

Appelons H le projeté orthogonal de M sur (ABC).

Si $M = H$, alors on a $AM = BM = CM$ donc M est le centre du cercle circonscrit à ABC, soit $M = O \in \Delta$.

Si $M \neq H$, alors les triangles AHM, BHM et CHM sont rectangles en H et, avec $AM = BM = CM$, on prouve comme plus haut (à l'aide du théorème de Pythagore) que $AH = BH = CH$ donc $H = O$. Or, les droites Δ et (MH) sont toutes deux perpendiculaires à (ABC) donc parallèles. Comme elles passent toutes les deux par le point O, elles sont confondues et $M \in \Delta$.

Finalement :

Tout point de l'espace est équidistant de A, B et C si et seulement si il appartient à Δ .

3) Appelons P le plan médiateur de [AB].

D'après la question précédente, $\forall M \in \Delta$, on a $AM = BM$, donc $M \in P$. Ainsi, $\Delta \subset P$.

Les points C et D jouant le même rôle, on montre de la même façon que $\Delta' \subset P$.

Ainsi, les droites Δ et Δ' sont coplanaires, donc soit sécantes, soit parallèles.

Mais si $\Delta // \Delta'$, alors les plans (ABC) et (ABD) sont parallèles (car Δ est perpendiculaire à (ABC) et Δ' est perpendiculaire à (ABD)). Ces deux plans contenant tous les deux A, ils sont confondus et ainsi, A, B, C et D sont coplanaires ce qui est absurde. Donc :

Δ et Δ' sont sécantes en un point Ω .

4) Le point Ω défini ci-dessus appartient à Δ donc $\Omega A = \Omega B = \Omega C$. Mais, il appartient aussi à Δ' , donc $\Omega A = \Omega B = \Omega D$ et ainsi $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ donc :

A, B, C et D sont sur une même sphère de centre Ω .

Exercice 2

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, on a :

$$M(x, y) = B_y(B_x(O, I), B_x(J, K)) = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} B_x(O, I) & B_x(J, K) \\ \hline 1-y & y \end{array} \right)$$

$$\text{avec } B_x(O, I) = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline 1-x & x \end{array} \right) \text{ et } B_x(J, K) = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c} J & K \\ \hline 1-x & x \end{array} \right).$$

Par associativité, on peut alors écrire :

$M(x, y) = \text{bar} \left(\begin{array}{c c c c} O & I & J & K \\ \hline (1-y)(1-x) & (1-y)x & y(1-x) & yx \end{array} \right)$
--

Remarquons alors que :

- $M(0, 0) = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & I & J & K \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = O$;
- $M(0, 1) = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & I & J & K \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = J$;
- $M(1, 0) = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & I & J & K \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = I$;
- $M(1, 1) = \text{bar} \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & I & J & K \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = K$.

Ainsi :

$O, I, J \text{ et } K \text{ appartiennent à } \mathcal{P}.$

2) A l'aide du résultat de la question 2, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM(x, y)} = \frac{(1-y)x\overrightarrow{OI} + y(1-x)\overrightarrow{OJ} + yx\overrightarrow{OK}}{(1-y)(1-x) + (1-y)x + y(1-x) + xy}.$$

Or, $(1-y)(1-x) + (1-y)x + y(1-x) + xy = (1-y)[(1-x) + x] + y[(1-x) + x] = 1-y + y = 1$ donc :

$$\overrightarrow{OM(x, y)} = (1-y)x\vec{i} + y(1-x)\vec{j} + yx(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = (x - xy + yx)\vec{i} + (y - xy + yx)\vec{j} + xy\vec{k}.$$

Soit :

$\overrightarrow{OM(x, y)} = x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k}$

Ceci prouve que dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées de $M(x, y)$ sont (x, y, xy) et on a $z = xy$.

Il est clair que réciproquement, tout point dont les coordonnées sont de la forme (x, y, xy) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le point $M(x, y)$ de \mathcal{P} , donc :

Une équation cartésienne de \mathcal{P} dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $z = xy$.
--

3) a. Pour $a \in \mathbb{R}$, notons P_a le plan d'équation $z = a$ et O_a le point de coordonnées $(0, 0, a)$.
Un point N de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{L}_a = \mathcal{P} \cap P_a$ si et seulement si $z = xy = a$.

Considérons deux cas :

- Si $a = 0$, alors $z = xy = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{L}_a = (Ox) \cup (Oy)$.
- Si $a \neq 0$, alors $z = xy = a \Leftrightarrow \begin{cases} y = a/x \\ z = a \end{cases}$ donc dans le plan P_a rapporté au repère orthonormé (O_a, \vec{i}, \vec{j}) , \mathcal{L}_a est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto a/x$, c'est donc une hyperbole.

Ainsi :

Si $a = 0$ $\mathcal{L}_a = (Ox) \cup (Oy)$ et sinon, \mathcal{L}_a est une hyperbole.

b. Quel que soit $a \neq 0$, \mathcal{L}_a est une hyperbole équilatère d'asymptotes les axes de (O_a, \vec{i}, \vec{j}) dans P_a . Alors :

- Si $a > 0$, l'axe de \mathcal{L}_a est la droite d'équations $\begin{cases} y = x \\ z = a \end{cases}$ et les sommets de \mathcal{L}_a sont les deux points d'intersections de \mathcal{L}_a avec son axe, donc les points dont les coordonnées vérifient $y = \frac{a}{x} = x$ et $z = a$.

On trouve les points $A(\sqrt{a}, \sqrt{a}, a)$ et $A'(-\sqrt{a}, -\sqrt{a}, a)$.

Ces points sont tous les deux dans le plan Π d'équation $y = x$.

- Si $a < 0$, l'axe de \mathcal{L}_a est la droite d'équations $\begin{cases} y = -x \\ z = a \end{cases}$ et les sommets de \mathcal{L}_a sont les deux points d'intersections de \mathcal{L}_a avec son axe, donc les points dont les coordonnées vérifient $y = \frac{a}{x} = -x$ et $z = a$.

On trouve les points $A(\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|}, a)$ et $A'(-\sqrt{|a|}, \sqrt{|a|}, a)$.

Ces points sont tous les deux dans le plan Π' d'équation $y = -x$.

Si on pose $\vec{u} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{v} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$, un repère orthonormé de Π (*resp.* Π') est (O, \vec{u}, \vec{k}) (*resp.* (O, \vec{v}, \vec{k})).

Alors :

- Quand $a > 0$, on a $\vec{OA} = \sqrt{a}\vec{i} + \sqrt{a}\vec{j} + a\vec{k} = \sqrt{2a}\vec{u} + a\vec{k}$ donc si (X_A, Y_A) sont les coordonnées de A dans (O, \vec{u}, \vec{k}) , on a $Y_A = \frac{1}{2}X_A^2$ avec $X_A > 0$ donc, quand a décrit \mathbb{R}_+^* , A décrit une demi parabole.

De même, on a $Y_{A'} = \frac{1}{2}X_{A'}^2$ avec $X_{A'} < 0$ et quand a décrit \mathbb{R}_+^* , A' décrit une demi parabole.

La réunion de ces deux demi paraboles est la parabole de Π d'équation $Y = \frac{1}{2}X^2$ privée du point O .

- Quand $a < 0$, on a $\vec{OA} = \sqrt{|a|}\vec{i} - \sqrt{|a|}\vec{j} + a\vec{k} = \sqrt{2|a|}\vec{v} + a\vec{k}$ donc si (X_A, Y_A) sont les coordonnées de A dans (O, \vec{v}, \vec{k}) , on a à nouveau $Y_A = -\frac{1}{2}X_A^2$ avec $X_A > 0$ donc, quand a décrit \mathbb{R}_-^* , A décrit encore

une demi parabole. De même, quand a décrit \mathbb{R}_-^* , A' décrit aussi une demi parabole d'équation $Y = -\frac{1}{2}X^2$ avec $X < 0$ dans (O, \vec{v}, \vec{k}) .

La réunion de ces deux demi paraboles est la parabole de Π' d'équation $Y = \frac{1}{2}X^2$ privée du point O .

Finalement :

Quand a décrit \mathbb{R}_+^* , les sommets \mathcal{L}_a décrivent une parabole du plan $\Pi: y = x$ privée de son sommet et quand a décrit \mathbb{R}_-^* , les sommets \mathcal{L}_a décrivent une parabole du plan $\Pi': y = -x$ privée de son sommet.

4) On a noté $\Pi: y = x$.

Un point N de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{H} = \mathcal{P} \cap \Pi$ si et seulement si
$$\begin{cases} x = y \\ z = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x^2 \end{cases}.$$

On a donc $\overline{ON} = x\vec{i} + x\vec{j} + x^2\vec{k} = \sqrt{2}x\vec{u} + x^2\vec{k}$ où \vec{u} est le vecteur défini dans la question précédente. Dans le repère (O, \vec{u}, \vec{k}) de Π défini plus haut, si N a pour coordonnées (X, Y) , une équation de \mathcal{H} est donc $X^2 = 2Y$ et ainsi :

\mathcal{H} est une parabole.

Dans (O, \vec{u}, \vec{k}) , le sommet \mathcal{H} est O , son axe est (OY) , son paramètre est $p = 1$, son foyer est $F(0, \frac{1}{2})$ et sa directrice est $D: Y = -\frac{1}{2}$. Dans le plan $\Pi: y = x$, si un point a pour coordonnées (X, Y) dans (O, \vec{u}, \vec{k}) et (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $x = y = \frac{X}{\sqrt{2}}$ et $z = Y$, donc, dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les éléments caractéristiques de \mathcal{H} sont :

- son sommet : O .
- son axe : (Oz) .
- son foyer : $F(0, 0, \frac{1}{2})$.
- sa directrice : $D: \begin{cases} y = x \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$.
- son paramètre : $p = 1$.

5) a. Pour x réel fixé, D_x est l'ensemble des points $M(x, y)$ lorsque y décrit \mathbb{R} . On a :

$$\overline{OM(x, y)} = x\vec{i} + y\vec{j} + xy\vec{k} = x\vec{i} + y(\vec{j} + x\vec{k}) = \overline{OM_x} + y\vec{u}_x$$

avec $M_x(x, 0, 0)$ et $\vec{u}_x = \vec{j} + x\vec{k}$.

Ceci se réécrit $\overline{M_xM(x, y)} = y\vec{u}_x$ avec $y \in \mathbb{R}$ donc :

D_x est la droite passant par $M_x(x, 0, 0)$ et dirigée par $\vec{u}_x = \vec{j} + x\vec{k}$.

b. On a :

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } M = M(x, y) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } M \in D_x \Leftrightarrow M \in \bigcup_{x \in \mathbb{R}} D_x.$$

Ainsi, $\mathcal{P} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} D_x$.

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\vec{u}_x = \vec{j} + x\vec{k}$ appartient au plan vectoriel engendré par \vec{j} et \vec{k} donc D_x est parallèle à tout plan dont le plan vectoriel associé est engendré par ces deux vecteurs, par exemple (yOz) .

Finalement :

\mathcal{P} est la réunion de la famille $(D_x)_{x \in \mathbb{R}}$ et les droites D_x sont toutes parallèles à $P = (yOz)$.

c. Pour y fixé, Δ_y est l'ensemble des points $M(x, y)$ lorsque x décrit \mathbb{R} . Comme plus haut, on peut écrire $\overrightarrow{OM}(x, y) = y\vec{j} + x(\vec{i} + y\vec{k})$ et :

Δ_y est la droite passant par $N_y(0, y, 0)$ et dirigée par $\vec{v}_y = \vec{i} + y\vec{k}$, \mathcal{P} est la réunion de la famille $(\Delta_y)_{y \in \mathbb{R}}$ et les droites Δ_y sont toutes parallèles à $P' = (xOz)$.

d. D'après ce qui précède, pour x et y donnés, le point $M(x, y)$ appartient à D_x et Δ_y donc ces deux droites sont soit confondues, soit sécantes en un point. Or, D_x et Δ_y sont dirigées par des vecteurs non colinéaires $(\vec{j} + x\vec{k}$ et $\vec{i} + y\vec{k})$ donc ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point : $M(x, y)$. Ainsi :

$$D_x \cap \Delta_y = \{M(x, y)\}$$

6) Comme $\vec{u}_x = \vec{j} + x\vec{k}$ et $\vec{v}_y = \vec{i} + y\vec{k}$ dirigent respectivement D_x et Δ_y , on a $(\vec{u}_x, \vec{v}_y) = \theta$ ou $\pi - \theta$ [π] donc :

$$|\vec{u}_x \cdot \vec{v}_y| = \|\vec{u}_x\| \|\vec{v}_y\| |\cos(\vec{u}_x, \vec{v}_y)| = \|\vec{u}_x\| \|\vec{v}_y\| |\cos \theta| \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{|\vec{u}_x \cdot \vec{v}_y|}{\|\vec{u}_x\| \|\vec{v}_y\|}$$

Et $\vec{u}_x \cdot \vec{v}_y = (\vec{j} + x\vec{k}) \cdot (\vec{i} + y\vec{k}) = xy$, $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{j} + x\vec{k}\| = \sqrt{1+x^2}$ et $\|\vec{v}_y\| = \|\vec{i} + y\vec{k}\| = \sqrt{1+y^2}$, donc :

$$\cos \theta = \frac{|xy|}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$$

