Corrigés des TD du Chapitre 9

Exercice 1

a. On veut prouver par récurrence sur n que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} k.k! = 0 \times 0! = 0 \times 1 = 0$ et $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$ donc la relation est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. On veut prouver que $\sum_{k=0}^{n+1} k.k! = (n+2)! - 1$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k.k! &= \sum_{k=0}^{n} k.k! + (n+1).(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (1+n+1).(n+1)! - 1 \\ &= (n+2).(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Donc la relation est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

b. En remarquant que pour tout entier k, on peut écrire $k = (k+1) - 1$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k.k! = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1) - 1\right] k! = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)k! - k!\right] = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)! - k!\right] = \sum_{k=0}^{n} (k+1)! - \sum_{k=0}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n+1} k! - \sum_{k=0}^{n} k! = (n+1)! - 1$$

c. Comme l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ qui à n associe n! est strictement croissante, on peut affirmer que $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n! \le N < (n+1)!$.

Supposons maintenant que la décomposition de N souhaitée existe.

On a alors, $\forall\, k \in [\![1;n]\!]$, $0 \le a_k \le k$ avec $1 \le a_n \le n$ donc $n! \le \sum_{k=1}^{n} a_k.k! \le \sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=0}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$, soit :

$$n! \le N < (n+1)!$$

Donc, d'après la remarque préliminaire, si n existe, il est unique.

Nous allons maintenant prouver la propriété demandée, procédons par récurrence généralisée sur N.

Initialisation : Pour $N = 1$, on a $1! \le N < 2!$ donc $n = 1$.

Si la décomposition existe elle est de la forme $N = a_1.1! = a_1$ soit $a_1 = 1$.

Or, avec $a_1 = 1$, on a bien $0 < a_1 \le 1$ et $N = 1 = \sum_{k=1}^{1} a_k.k!$ donc pour $N = 1$, la décomposition existe et est unique et la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons la propriété vraie *jusqu'au* rang $N - 1 \ge 1$ (récurrence *généralisée*).

On a vu que si la décomposition voulue de N existe, alors n est l'unique entier tel que $n! \le N \le (n+1)! - 1$.

De plus, $0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k.k! \leq \sum_{k=1}^{n-1} k.k! = n!-1$ donc $0 \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} a_k.k! \leq 1-\frac{1}{n!} < 1$.

Or, $\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} a_k.k! = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k.k! - a_n.n!\right) = \frac{N}{n!} - a_n$ donc $0 \leq \frac{N}{n!} - a_n < 1 \Leftrightarrow a_n \leq \frac{N}{n!} < a_n + 1$.

Ceci prouve que si la décomposition existe alors a_n est unique et vaut $a_n = E\left[\frac{N}{n!}\right]$.

Posons alors $N' = N - a_n n!$. On a $N' < N$ donc par hypothèse de récurrence, il existe une unique décomposition $N' = \sum_{k=1}^{n'} a_k.k!$ avec $(a_1, a_2, ..., a_{n'})$ entiers tels que $0 \leq a_k \leq k$ et $a_{n'} \neq 0$.

Remarquons enfin que $0 \leq N' < n!$ donc d'après la remarque préliminaire, $n' < n$.

Ainsi, $N = N' + a_n n! = \sum_{k=1}^{n'} a_k.k! + a_n n!$ et cette décomposition est unique.

En complétant éventuellement par des a_k nuls pour $n' < k < n$, on obtient bien une unique décomposition de N sous la forme voulue et la propriété est vraie au rang N.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

1) On veut prouver par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$ donc la relation est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. On veut prouver que $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2 + 4(n+1)\right] = \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc la relation est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2) On veut prouver par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $\prod_{k=1}^{1}(4k-2) = 4-2 = 2$ et $\prod_{k=1}^{1}(1+k) = 1+1 = 2$ donc la relation est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. On veut prouver que $\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)$.

On a d'une part : $\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) = \left[\prod_{k=1}^{n}(4k-2)\right]\left[4(n+1)-2\right] = \left[\prod_{k=1}^{n}(4k-2)\right](4n+2)$.

Et d'autre part :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)=\prod_{k=2}^{n+2}(n+k)=\left[\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right]\frac{(n+n+1)(n+n+2)}{n+1}$$
$$=\left[\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right]\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}=\left[\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right](4n+2)$$

Or, par hypothèse de récurrence $\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$ donc $\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)$ et la relation est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

3) On veut prouver par récurrence que $\forall\, n\geq 24$, il existe deux entiers naturels p et q tels que $n=5p+7q$.

Initialisation : Pour $n=24$, on a $24=5\times 2+7\times 2$ donc la propriété est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n\geq 24$.

On veut prouver qu'il existe deux entiers naturels p et q tels que $n+1=5p+7q$.

Par hypothèse de récurrence, il existe deux entiers naturels p' et q' tels que $n=5p'+7q'$.

Or, $1=15-14=5\times 3-2\times 7$ donc $n+1=5(p'+3)+7(q'-2)$.

- Si $q'\geq 2$, on pose $p=p'+3\in\mathbb{N}$ et $q=q'-2\in\mathbb{N}$ et on a bien $n+1=5p+7q$.
- Si $q'<2$, soit $q'\leq 1$ alors on a : $24\leq n=5p'+7q'\leq 5p'+7 \Rightarrow 17\leq 5p' \Rightarrow p'\geq 4$.

  On écrit alors $1=21-20=7\times 3-5\times 4$ d'où $n+1=5(p'-4)+7(q'+3)$.

  On pose $p=p'-4\in\mathbb{N}$ et $q=q'+3\in\mathbb{N}$ et on a bien $n+1=5p+7q$.

Donc la relation est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, n\geq 24$.

Exercice 3

a. On a $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$ avec $A\cap B\subset A$ donc $\underline{\mathrm{Card}\,(A\setminus B)=\mathrm{Card}\,A-\mathrm{Card}\,(A\cap B)}$.

b. On a :

$$\mathrm{Card}\,(A\Delta B)=\mathrm{Card}\big((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\big)=\mathrm{Card}\,(A\setminus B)+\mathrm{Card}\,(B\setminus A)-\mathrm{Card}\big((A\setminus B)\cap(B\setminus A)\big).$$

Or, $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\varnothing$ donc, d'après la question précédente :

$$\underline{\mathrm{Card}\,(A\Delta B)=\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,B-2\mathrm{Card}\,(A\cap B)}.$$

c. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\,(A\cup B\cup C)&=\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,(B\cup C)-\mathrm{Card}\big(A\cap(B\cup C)\big)\\&=\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,B+\mathrm{Card}\,C-\mathrm{Card}\,(B\cap C)-\mathrm{Card}\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\big)\\&=\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,B+\mathrm{Card}\,C-\mathrm{Card}\,(B\cap C)\\&\qquad-\Big[\mathrm{Card}\,(A\cap B)+\mathrm{Card}\,(A\cap C)-\mathrm{Card}\big((A\cap B)\cap(A\cap C)\big)\Big]\end{aligned}$$

Et comme $(A\cap B)\cap(A\cap C)=A\cap B\cap C$, on a :

$$\underline{\mathrm{Card}\,(A\cup B\cup C)=\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,B+\mathrm{Card}\,C-\mathrm{Card}\,(B\cap C)-\mathrm{Card}\,(A\cap B)-\mathrm{Card}\,(A\cap C)+\mathrm{Card}\,(A\cap B\cap C)}.$$

d. On a, d'après la question 2, $\mathrm{Card}\big((A\Delta B)\Delta C\big)=\mathrm{Card}\,(A\Delta B)+\mathrm{Card}\,C-2\mathrm{Card}\big((A\Delta B)\cap C\big)$.

Or, $(A\Delta B)\cap C=\big[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\big]\cap C=\big[(A\setminus B)\cap C\big]\cup\big[(B\setminus A)\cap C\big]=\big[(A\cap C)\setminus B\big]\cup\big[(B\cap C)\setminus A\big]$.

Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\big((A\Delta B)\cap C\big)&=\mathrm{Card}\Big(\big[(A\cap C)\setminus B\big]\cup\big[(B\cap C)\setminus A\big]\Big)\\&=\mathrm{Card}\Big(\big[(A\cap C)\setminus B\big]\Big)+\mathrm{Card}\Big(\big[(B\cap C)\setminus A\big]\Big)-\mathrm{Card}\Big(\big[(A\cap C)\setminus B\big]\cap\big[(B\cap C)\setminus A\big]\Big)\\&=\mathrm{Card}\,(A\cap C)-\mathrm{Card}\,(A\cap B\cap C)+\mathrm{Card}\,(B\cap C)-\mathrm{Card}\,(A\cap B\cap C)-\mathrm{Card}\,\varnothing\\&=\mathrm{Card}\,(A\cap C)+\mathrm{Card}\,(B\cap C)-2\mathrm{Card}\,(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la question 2, on a :

$$\underline{\mathrm{Card}\big((A\Delta B)\Delta C\big)=\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,B+\mathrm{Card}\,C-2\mathrm{Card}\,(A\cap B)-2\mathrm{Card}\,(A\cap C)-2\mathrm{Card}\,(B\cap C)}$$
$$\underline{+4\mathrm{Card}\,(A\cap B\cap C)}$$

Exercice 4

Remarquons deux choses :

- $\forall\,(y,y')\in F^2,\ y\neq y'\Rightarrow\big[f^{-1}(\{y\})\big]\cap\big[f^{-1}(\{y'\})\big]=\varnothing$.
  En effet, s'il existait un x de E dans cette intersection, alors on aurait $f(x)=y=y'$, ce qui est absurde.
- $\forall\,x\in E$, on a $x\in f^{-1}(\{y\})$ avec $y=f(x)$ donc $\forall\,x\in E$, $E\subset\bigcup_{y\in F}f^{-1}(\{y\})\subset E$, soit $\bigcup_{y\in F}f^{-1}(\{y\})=E$.

Ainsi :

$$E=\bigcup_{y\in F}f^{-1}(\{y\})\ \text{avec tous les } f^{-1}(\{y\})\ \text{disjoints deux à deux.}$$

Alors :

$$\mathrm{Card}\,E=\mathrm{Card}\Big(\bigcup_{y\in F}f^{-1}(\{y\})\Big)=\sum_{y\in F}\mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{y\})\big)=\sum_{y\in F}p=p\times\mathrm{Card}\,F.$$

Exercice 5

a. Appelons Marcel, Maurice, Berthe et Barnabé les quatre joueurs placés autour de la table.

On peut envisager une donne de la façon suivante :

- On distribue 18 cartes à Marcel : il y a $\binom{78}{18}$ possibilités.
- Le jeu de Marcel étant servi, on distribue 18 cartes à Maurice (tirées des $78-18=60$ cartes restantes) : pour chacune des $\binom{78}{18}$ possibilités précédentes, il y a $\binom{60}{18}$ possibilités. Donc, il y a en tout $\binom{78}{18}\times\binom{60}{18}$ paires de jeux possibles pour Marcel et Maurice.
- En continuant, on distribue le jeu de Bethe (18 cartes parmi les $60-18=42$ cartes restantes), puis celui de Barnabé (18 cartes parmi les $42-18=24$ cartes restantes). Il reste $24-18=6$ cartes : c'est le chien.

Finalement, on a en tout :

$$\boxed{\binom{78}{18}\times\binom{60}{18}\times\binom{42}{18}\times\binom{24}{18}=\frac{78!}{18!\cancel{60!}}\frac{\cancel{60!}}{18!\cancel{42!}}\frac{\cancel{42!}}{18!\cancel{24!}}\frac{\cancel{24!}}{18!6!}=\frac{78!}{(18!)^4 6!}\text{ donnes possibles.}}$$

b. Séparons la question du « au moins » en trois « exactement » :

- S'il y a exactement un bout dans le chien, il y a 3 possibilités pour le bout.

  Le bout étant choisi, on élimine les deux autres et on complète le chien par 5 cartes choisies parmi les 75 cartes restantes : il y a $\binom{75}{5}$ possibilités. Restent alors 72 cartes à répartir comme plus haut entre les 4 joueurs. On a donc en tout :

  $$3\times\binom{75}{5}\times\binom{72}{18}\times\binom{54}{18}\times\binom{36}{18}\times\binom{18}{18}=\frac{3\times 75!\times 72!}{(18!)^4 70!5!}\text{ donnes avec exactement 1 bout dans le chien.}$$

- S'il y a exactement deux bouts dans le chien, il y a $\binom{3}{2}=3$ possibilités pour le couple de bouts et comme plus haut, on a alors :

  $$3\times\binom{75}{4}\times\binom{72}{18}\times\binom{54}{18}\times\binom{36}{18}\times\binom{18}{18}=\frac{3\times 75!\times 72!}{(18!)^4 71!4!}\text{ donnes avec exactement 2 bouts dans le chien.}$$

- S'il y a exactement trois bouts dans le chien, il y a 1 possibilités pour les bouts et comme plus haut, on a alors (en partant de 75 cartes) :

  $$\binom{75}{3}\times\binom{72}{18}\times\binom{54}{18}\times\binom{36}{18}\times\binom{18}{18}=\frac{75!\times 72!}{(18!)^4 72!3!}\text{ donnes avec exactement 3 bouts dans le chien.}$$

En tout, on a donc :

$$\boxed{\frac{3\times 75!\times 72!}{(18!)^4 70!5!}+\frac{3\times 75!\times 72!}{(18!)^4 71!4!}+\frac{75!\times 72!}{(18!)^4 72!3!}=\frac{75!}{(18!)^4}\frac{4109}{30}\text{ possibilités.}}$$

Pour aller plus loin, on peut calculer la probabilité p d'avoir au moins un bout dans le chien qui est :

$$p=\frac{\text{nombre de donnes avec au moins un bout dans le chien}}{\text{nombre total de donnes possibles}}=\frac{587}{2717}\approx 0,22\,.$$

Soit plus d'une chance sur 5 d'avoir au moins un bout dans le chien, ce qui n'est pas mal !

Pour calculer cette probabilité p, on aurait pu s'y prendre autrement en comptant juste les chiens possibles.

Il y a $\binom{78}{6}$ et parmi ceux-ci, il y en a $3\times\binom{75}{5}$ qui contiennent exactement un bout, $3\times\binom{75}{4}$ qui contiennent exactement deux bouts et $\binom{75}{3}$ qui contiennent les trois bouts. Donc :

$$p=\frac{3\times\binom{75}{5}+3\times\binom{75}{4}+\binom{75}{3}}{\binom{78}{6}}=\frac{587}{2717}\,.$$

Exercice 6

Le mot DENOMBREMENT contient 12 lettres.

Dans un premier temps, numérotons les lettres en double pour les différencier : $DE_1N_1OM_1BRE_2M_2E_3N_2T$.

Le nombre d'anagrammes est alors le nombre de permutations de ces 12 lettres distinctes soit 12!.

Mais, la non différentiation des E, M et N fait que parmi ces 12! anagrammes, chacun est compté plusieurs fois.

Par exemple, à cause les deux M, chaque anagramme est compté deux fois, de même pour les deux N. Pour les trois E, chaque anagramme est compté 3! = 6 fois (autant que de permutations des trois E).

Ainsi, parmi ces 12! possibilités, chaque anagramme est compté $2\times2\times6=24$ fois donc :

$$\boxed{\text{Le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est } \frac{12!}{24}=19958400.}$$

Exercice 7

a. Le nombre d'applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n^2]\!]$ est $(n^2)^n=n^{2n}$.

Le nombre d'injections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n^2]\!]$ est $A_{n^2}^n=\dfrac{(n^2)!}{(n^2-n)!}$.

La proportion recherchée est donc :

$$\boxed{p_n=\frac{(n^2)!}{n^{2n}(n^2-n)!}}$$

b. Posons $u_n=\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$. D'après l'énoncé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$. On peut écrire $n!=u_n\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ donc :

$$p_n=\frac{u_{n^2}\sqrt{2\pi n^2}\left(\dfrac{n^2}{e}\right)^{n^2}}{n^{2n}u_{n^2-n}\sqrt{2\pi(n^2-n)}\left(\dfrac{n^2-n}{e}\right)^{n^2-n}}=\frac{u_{n^2}}{u_{n^2-n}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}e^{-n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2-n}$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n^2}}{u_{n^2-n}}\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n^2-n}$.

Pour calculer cette limite, passons au ln :

$$\ln p_n=\ln\left[e^{-n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2-n}\right]=n(n-1)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-n=n(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)-n.$$

Si on pose $x=\dfrac{1}{n-1}$, on a $n=1+\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln p_n=\lim\limits_{x\to0^+}\left((1+\dfrac{1}{x})\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\right]=0$ et on peut écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln p_n=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

Exercice 8

a. Remarquons déjà que si $p > n$, il est impossible de construire une application strictement croissante de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.

Si $p \leq n$, une application $f : [\![1;p]\!] \to [\![1;n]\!]$ strictement croissante est injective et chaque entier de $[\![1;p]\!]$ à une image distincte de toutes les autres dans $[\![1;n]\!]$. Pour construire une telle application, il suffit alors de choisir p entiers distincts dans $[\![1;n]\!]$. L'image de 1 sera le plus petit, celle de 2 le suivant, etc.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le nombre d'applications f strictement croissantes de } [\![1;p]\!] \text{ dans } [\![1;n]\!] \text{ est } \binom{n}{p}.}$$

b. Si $f : [\![1;p]\!] \to [\![1;n]\!]$ est juste croissante, elle n'est pas forcément injective et deux éléments peuvent avoir la même image. Appelons $S_{p,n}$ le nombre d'applications f croissantes de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$.

Soit $f : [\![1;p]\!] \to [\![1;n]\!]$ croissante telle que $f(p) = k$ avec $k \in [\![1;n]\!]$.

Pour tout $i \in [\![1;p-1]\!]$, on a alors $f(i) \leq k$ donc le nombre d'applications croissantes de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ telles que $f(p) = k$ est égal au nombre d'applications croissantes de $[\![1;p-1]\!]$ dans $[\![1;k]\!]$, soit $S_{p-1,k}$.

Comme $f(p)$ peut prendre toutes les valeurs de $[\![1;n]\!]$, on obtient :

$$S_{p,n} = S_{p-1,1} + S_{p-1,2} + \ldots + S_{p-1,n} = \sum_{k=1}^{n} S_{p-1,k}.$$

Par ailleurs, il est clair que toute application de $[\![1;1]\!] = \{1\}$ dans $[\![1;n]\!]$ est croissante (!) et il y en a n (autant que d'images possibles pour 1) donc, pour tout n, $S_{1,n} = n$. Alors :

- $S_{2,n} = \sum_{k=1}^{n} S_{1,k} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $S_{3,n} = \sum_{k=1}^{n} S_{2,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

On remarque que $S_{1,n} = \binom{n}{1}$, $S_{2,n} = \binom{n+1}{2}$, $S_{3,n} = \binom{n+2}{3}$ donc on conjecture que $S_{p,n} = \binom{n+p-1}{p}$.

Prouvons ce résultat par récurrence sur p (pour tout n).

Initialisation : On vient de voir que la relation est vraie pour $p = 1$, 2 et 3.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang p (et pour tout n). On veut prouver que $S_{p+1,n} = \binom{n+p}{p+1}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_{p+1,n} &= \sum_{k=1}^{n} S_{p,k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+p-1}{p} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{k+p-1}{p} + \binom{p}{p} = \sum_{k=2}^{n} \left[\binom{k+p}{p+1} - \binom{k+p-1}{p+1}\right] + 1 \qquad \text{(par la formule de Pascal)} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{k+p}{p+1} - \sum_{k=2}^{n} \binom{k+p-1}{p+1} + 1 = \sum_{k=2}^{n} \binom{k+p}{p+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k+p}{p+1} + 1 = \binom{n+p}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} + 1 = \binom{n+p}{p+1}
\end{aligned}$$

Donc la relation est vraie au rang $p+1$ (pour tout n).

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le nombre d'applications croissantes de } [\![1;p]\!] \text{ dans } [\![1;n]\!] \text{ est } \binom{n+p-1}{p}.}$$

Remarque : D'après la question 1, le résultat ci-dessus correspond au nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n+p-1]\!]$, ce qui suggère que l'on aurait pu raisonner autrement.

Pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$ fixés, appelons A l'ensemble des applications croissantes de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ et B celui des applications strictement croissantes de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n+p-1]\!]$. Ce qui précède dit que $\text{Card}\, A = \text{Card}\, B$ et donc que l'on peut construire une bijection entre les ensembles finis A et B.

Réciproquement, construire une telle bijection permettrait de prouver le résultat.

Pour $f \in A$, posons $\forall\, k \in [\![1;p]\!]$, $\tilde{f}(k) = f(k) + k - 1$. On a alors :

- $\forall\, k \in [\![1;p]\!]$, $1 \leq f(k) \leq n$ donc $k \leq f(k) + k - 1 \leq n + k - 1 \leq n + p - 1$ et $\tilde{f}(k) \in [\![1;n+p-1]\!]$, c'est-à-dire que $\tilde{f}$ est une application de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n+p-1]\!]$.
- $\forall\, (k,k') \in [\![1;p]\!]^2$, si $k < k'$ alors $f(k) \leq f(k')$ donc $\tilde{f}(k) = f(k) + k - 1 \leq f(k') + k - 1 < f(k') + k' - 1 = \tilde{f}(k')$ et $\tilde{f}$ est strictement croissante.

Ceci prouve que $\tilde{f} \in B$ et on peut définir $\varphi : A \to B \,;\, f \mapsto \tilde{f}$. Montrons que φ est bijective.

- Soit $(f,f') \in A^2$ tel que $\varphi(f) = \varphi(f')$. On a alors, $\forall\, k \in [\![1;p]\!]$, $f(k) + k - 1 = f'(k) + k - 1$ soit $f(k) = f'(k)$. Donc, $f = f'$ et φ *est injective*.
- $\forall\, g \in B$, posons alors $\forall\, k \in [\![1;p]\!]$, $f(k) = g(k) - (k-1)$.
  - f est croissante ssi $\forall\, k \in [\![1;p]\!]$, $f(k) \leq f(k+1) \Leftrightarrow f(k) < f(k+1) + 1$.
    Or, $\forall\, k \in [\![1;p]\!]$, $g(k) < g(k+1)$ donc $f(k) < f(k+1) + 1$ et f est croissante.
  - $\forall\, k \in [\![1;p]\!]$, on a alors $f(1) \leq f(k) \leq f(p)$.
    Or, $f(1) = g(1) \geq 1$ et $f(p) = g(p) - (p-1) \leq n + p - 1 - (p-1) = n$ donc $f(k) \in [\![1;n]\!]$.

  On en déduit que $f \in A$ et, comme $\forall\, k \in [\![1;p]\!]$, $g(k) = f(k) + k - 1$, on a $\varphi(f) = g$. Ainsi, φ *est surjective*.

Finalement, φ est bijective et donc $\text{Card}\, A = \text{Card}\, B$.

Exercice 9

a. Par définition, une relation binaire sur E est partie de $E \times E$, donc le nombre de relations binaires dans E est le cardinal de $\mathscr{P}(E \times E)$, c'est-à-dire $2^{\text{Card}(E\times E)} = 2^{n^2}$ donc :

$$\boxed{\text{Le nombre de relations binaires dans E est } 2^{n^2}.}$$

b. Si on pose $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $E \times E$ est l'ensemble des couples (x_i, x_j).

Une relation binaire symétrique est alors une partie G de E telle que si $(x_i, x_j) \in G$ alors $(x_j, x_i) \in G$ et pour la caractériser complètement, il suffit de donner les éléments de la forme (x_i, x_j) avec $i \leq j$.

Ainsi, le nombre de relations binaires symétriques dans E est égal au nombre de parties de $E' = \{(x_i, x_j) \in E \times E \setminus i \le j\}$, soit $2^{\text{Card}(E')}$. Or, E' contient n éléments de la forme (x_1, x_i), $n-1$ éléments de la forme (x_2, x_i), $n-2$ éléments de la forme (x_3, x_i), … , 2 éléments de la forme (x_{n-1}, x_i) et 1 élément de la forme (x_n, x_i) (qui est (x_n, x_n)). Alors, $\text{Card}(E') = 1 + 2 + ... + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et donc :

$$\boxed{\text{Le nombre de relations binaires symétriques dans E est } 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.}$$

c. Une relation binaire symétrique et réflexive est une partie G de E telle que si $(x_i, x_j) \in G$ alors $(x_j, x_i) \in G$ et pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $(x_i, x_i) \in G$. Pour la caractériser complètement, il suffit de donner les éléments de la forme (x_i, x_j) avec $i < j$ et le nombre de relations binaires symétriques et réflexives dans E est égal au nombre de parties de $E'' = E' - \{(x_i, x_i) \setminus x_i \in E\}$.

Comme $\{(x_i, x_i) \setminus x_i \in E\} \subset E'$, on a $\text{Card}(E'') = \text{Card}(E') - \text{Card}\{(x_i, x_i) \setminus x_i \in E\} = \dfrac{n(n+1)}{2} - n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Alors :

$$\boxed{\text{Le nombre de relations binaires symétriques et réflexives dans E est } 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.}$$

Exercice 10

Considérons un groupe de n femmes et m hommes et choisissons p personnes avec $p \le \inf(n, m)$ parmi celles de l'assemblée de $n+m$ personnes en tout. Il y a $\dbinom{n+m}{p}$ possibilités.

Soit maintenant un entier k tel que $0 \le k \le p$. Constituons un groupe de p personnes contenant exactement k femmes (et donc $p-k$ hommes). Il y a $\dbinom{n}{k}$ possibilités de choisir les k femmes et pour chaque groupe de femmes possible, il y $\dbinom{m}{p-k}$ possibilités de choisir les $p-k$ hommes. Donc, il y a $\dbinom{n}{k}\dbinom{m}{p-k}$ groupes de p personnes contenant exactement k femmes. Comme k peut valoir 0, 1, 2, … ou n, le nombre total de groupes de p personnes est alors $\sum_{k=0}^{p} \dbinom{n}{k}\dbinom{m}{p-k}$.

Finalement, on a bien $\forall\,(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $\forall\, p \in \mathbb{N}$ tel que $p \le \inf(n, m)$:

$$\boxed{\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}}$$