TD du Chapitre 10 - Structures algébriques usuelles

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par $x * y = x + y - xy$.

a. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?

b. Calculer $x * x * ... * x$ (n facteurs) en fonction de x et n.

Exercice 2

Soient $(G,.)$ un groupe (la loi est notée multiplicativement) et G_1 et G_2 deux sous-groupes de G.

1) Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ où $(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$ est un groupe.

   Remarque : On montre de la même façon que si $(G,*)$ et $(H,\bullet)$ sont deux groupes, alors $(G \times H, \otimes)$ où $(x, y) \otimes (x', y') = (x * x', y \bullet y')$ est un groupe (appelé *groupe produit*).

2) Montrer que $G_1 \cap G_2$ est un sous-groupe de G.

3) Montrer que si $(G_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de G alors $\bigcap_{i \in I} G_i$ est un sous-groupe de G.

4) Soit A une partie de G. Montrer que l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe de G contenant A (appelé *sous-groupe engendré par* A).

5) Montrer que $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si G_1 est inclus dans G_2 ou G_2 est inclus dans G_1.

6) On pose $G_1 G_2 = \{x_1 x_2 \backslash x_1 \in G_1, x_2 \in G_2\}$. Montrer que $G_1 G_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si $G_1 G_2 = G_2 G_1$.

Exercice 3

Soit $(G,*)$ un groupe contenant trois éléments.

Dresser la table de G, déterminer tous les sous-groupes de G et donner un exemple d'un tel groupe.

Exercice 4

Soient G un groupe et $a \in G$. Montrer que $x \mapsto axa^{-1}$ est un automorphisme de G et donner sa réciproque.

Exercice 5

Soit f un morphisme de groupes de $(G,+)$ dans $(H,.)$ et soit b un élément de H qui possède un antécédent $a \in G$ par f. Montrer que $f^{-1}(\{b\}) = a + \ker f = \ker f + a$.

Exercice 6

On pose $A = \mathbb{R}^{[-1;1]}$ et on appelle B l'ensemble des applications de A nulles sur $[-1;0]$. Montrer que B muni de l'addition et du produit usuels est un anneau, mais que ce n'est pas un sous-anneau de A.

Exercice 7

Soit E un ensemble. Dans $\mathscr{P}(E)$, on pose $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (la différence symétrique de A et B). Montrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau. En préciser le neutre et les inversibles (et leur inverse) pour chacune des deux lois. Cet anneau est-il intègre ?

Exercice 8

Soit A un anneau intègre, fini et commutatif. Montrer que c'est un corps.

☺ *Pour* $a \in A$ *non nul, on pourra montrer que* $x \mapsto ax$ *est une injection de* $A \setminus \{0\}$ *dans lui-même et en déduire l'existence d'un inverse pour* a.

Exercice 9

Pour $\mathbb{E} = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, on pose $\mathbb{E}[\sqrt{2}] = \left\{ P(\sqrt{2}) \setminus P \text{ est un polynôme à coefficients dans } \mathbb{E} \right\}$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau intègre. Déterminer ses inversibles.
2) Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps.

Exercice 10

1) Prouver que tout sous-corps de $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$.
2) Déterminer le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

Exercice 11

Calculer les sommes et produits suivantes :

a) $\sum_{k=7}^{73} (3k^2 + 2k + 2)$ sachant que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

c) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} 2^j i$ et $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (i+j) 2^{i+j}$.

d) $\sum_{1 \le i,j \le n} ij$ puis $\sum_{1 \le i \le j \le n} ij$.

e) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k}$ et $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{i}$ (à l'aide de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ que l'on ne cherchera pas à simplifier).

f) $\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k})$ et $\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$.

g) $\prod_{k=2}^{n} 2^{k^2}$.

Exercice 12

Soient un entier $p \geq 2$ et a un entier relatif non nul premier avec p. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note r_n le reste de la division euclidienne de a^n par p.

1) Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
2) Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{2010} par 5 ?
3) Montrer que $3^{126}+5^{126}$ est divisible par 13.

Exercice 13

Déterminer tous les sous-anneaux de $\mathbb{Z}$.

Exercice 14

Soit p un nombre premier.

1) Prouver que $\forall k \in [\![1;p-1]\!]$, $\binom{p}{k}$ est divisible par p.
2) Montrer alors par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^p - n$ est divisible par p (c'est le petit théorème de Fermat).