TD du Chapitre 9 : Entiers naturels

Exercice 1

a. Prouver par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

b. Prouver le résultat ci-dessus dans utiliser de récurrence.

c. Montrer que $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un unique n-uplet $(a_1, a_2, ..., a_n)$ d'entiers naturels tel que $0 \le a_k \le k$, $a_n \ne 0$ et $N = \sum_{k=1}^{n} a_k.k!$.

Exercice 2

Montrer par récurrence les propriété suivantes :

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) $\forall\, n \ge 1$, $\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$.

3) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge 24$, il existe deux entiers naturels p et q tels que $n = 5p + 7q$.

Exercice 3

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E fini. Calculer les cardinaux suivants en fonction de ceux de A, B et C et des intersections de ces ensembles :

a. $\operatorname{Card}(A \setminus B)$.

b. $\operatorname{Card}(A \vartriangle B)$ avec $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

c. $\operatorname{Card}(A \cup B \cup C)$.

d. $\operatorname{Card}((A \vartriangle B) \vartriangle C)$.

Exercice 4

Soient E et F deux ensembles finis non vides, p un entier naturel non nul et une application $f : E \to F$ telle que $\forall\, y \in F$, $\operatorname{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right) = p$. Montrer que $\operatorname{Card} E = p \times \operatorname{Card} F$.

Cette propriété s'appelle le lemme des bergers : Un berger qui connait le nombre de pattes dans son troupeau connait le nombre de têtes…

Exercice 5

Le tarot se joue à quatre joueurs avec un jeu de 78 cartes. Réaliser une donne consiste à distribuer 18 cartes à chaque joueur et en laisser 6 au milieu (le chien).

a. Les joueurs étant placés autour d'une table combien y a-t-il de donnes possibles ?

b. Les bouts sont trois cartes spéciales du jeu : les 1 et 21 d'atout et l'excuse. Combien y a-t-il de donnes pour lesquelles il y a au moins un bout dans le chien ?

Exercice 6

Calculer le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Quelle est la proportion des applications de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n^2]\!]$ qui sont injectives ?

b. En admettant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2\pi n}}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n = 1$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$, montrer que cette proportion tend vers une limite finie $\ell > 0$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 8

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Déterminer le nombre d'applications f de $[\![1;p]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ vérifiant la condition :

a. f est strictement croissante.
b. f est croissante.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n. Dans E, quel est le nombre de :

a. Relations binaires ?
b. Relations binaires symétriques ?
c. Relations binaires symétriques et réflexives ?

Exercice 10

Prouver la formule de Vandermonde : $\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2$ et $\forall\, p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq \inf(n,m)$:

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}.$$

☺ *On pourra considérer une assemblée de* n *femmes et* m *hommes et dénombrer de deux manières le nombre de façons de constituer un groupe de* p *personnes parmi celles de l'assemblée.*