Chapitre 12 – Suites numériques

On considère u et v deux suites et ℓ et ℓ' deux réels.

Somme : u + v

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F. I.***

Produit : uv

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	***F. I.***

Remarque : Si v est constante telle que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n=\lambda$, on obtient les limites de (λu_n).

Quotient : $\dfrac{u}{v}$ (avec $v_n\neq 0$ apcr)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	ℓ	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	***F. I.***

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	0^+	0^-	$\ell'>0$	$\ell'<0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	***F. I.***

F. I. = Forme Indéterminée

Suites arithmétiques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $R\in\mathbb{C}$ si $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+R$. Alors :

- $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0+nR$.
- $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, p\in\mathbb{N}$, $u_n=u_p+(n-p)R$.
- $\forall\, n\in\mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}.$$
- $\forall\,(p,n)\in\mathbb{N}^2$:
$$\sum_{k=p}^{n+p}u_k=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{n+p}=(n+1)\frac{u_p+u_{n+p}}{2}=(\text{nb de termes})\times(\text{moyenne du }1^{\text{er}}\text{ et du dernier terme}).$$
- Si la suite est *réelle*, (c'est-à-dire $R\in\mathbb{R}$ et $u_0\in\mathbb{R}$) alors :
  - si $R>0$, u est croissante et diverge vers $+\infty$
  - si $R<0$, u est décroissante et diverge vers $-\infty$.

Suites géométriques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q\in\mathbb{C}$ si $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=qu_n$. Alors :

- $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0q^n$.
- $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, p\in\mathbb{N}$, $u_n=u_pq^{n-p}$.
- si $q\neq 1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
- si $q\neq 1$, $\forall\,(p,n)\in\mathbb{N}^2$:
$$\sum_{k=p}^{n+p}u_k=u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{n+p}=u_p\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=(1^{\text{er}}\text{ terme})\times\frac{1-q^{(\text{nb de termes})}}{1-q}.$$
- Si la suite est *réelle*, (c'est-à-dire $q\in\mathbb{R}$ et $u_0\in\mathbb{R}$) alors :
  - si $q<0$, u n'est pas monotone ;
  - si $q>0$, u est monotone et son sens de variation dépend de la position de q par rapport à 1 et du signe de son premier terme.
- Si $|q|<1$, u converge vers 0, si $|q|>1$, u diverge, si $q=1$, u est constante.
- Si la suite est *réelle* et $q>1$, u diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de son premier terme.