Corrigé du DS n° 3

Exercices 1 et 2

Voir les TD.

Exercice 3

1) On a $A(a,1,-1)$, $B(-1,a,1)$, et $C(1,-1,a)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-1-a\\a-1\\2\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}1-a\\-2\\a+1\end{vmatrix}$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}(a-1)(a+1)+4\\2(1-a)-(-1-a)(a+1)\\(-1-a)(-2)-(a-1)(1-a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2+3\\a^2+3=(a^2+3)\vec{u}\\a^2+3\end{vmatrix}$$

avec $\vec{u}(1,1,1)$.

Or, $\forall a\in\mathbb{R}$, on a $a^2+3\neq 0$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$, donc $\forall a\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont jamais colinéaires, et donc que :

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R}\text{, A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})&=\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})\\&=\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OA})\qquad\text{par trilinéarité du déterminant}\\&=\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OA})\qquad\text{par antisymétrie du déterminant}\\&=(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{OA}=(a^2+3)\,\vec{u}\,.\overrightarrow{OA}=(a^2+3)(a+1-1)=a(a^2+3)\end{aligned}$$

Comme $\forall a\in\mathbb{R}$, on ne peut pas factoriser a^2+3 dans $\mathbb{R}$, le résultat ci-dessus est factorisé au maximum donc :

$$\boxed{\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=a(a^2+3)}$$

3) Les points O, A, B et C sont coplanaires si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ le sont , c'est-à-dire si et seulement si $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=0$. Or :

$$\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=0\iff a(a^2+3)=0\iff a=0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{O, A, B et C soient coplanaires si et seulement } a=0.}$$

4) Soit M un point de coordonnées (x,y,z). On a :

$$M\in(ABC)\iff\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM})=0\iff(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=0.$$

Or, on a vu que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc, avec $A(a,1,-1)$:

$$M \in (ABC) \iff \vec{u}.\overrightarrow{AM} = 0 \iff (x-a)+(y-1)+(z+1)=0 \iff x+y+z-a=0$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan (ABC) est } x+y+z=a.}$$

5) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC), donc $\vec{u}$ aussi. C'est donc un vecteur directeur de toute perpendiculaire à (ABC), en particulier Δ. Comme Δ passe par O, un point M appartient à D si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, soit $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si (x,y,z) sont les coordonnées de M, on a alors $x=y=z=\lambda$ donc :

$$\boxed{\text{Un système d'équations cartésiennes de } \Delta \text{ est } \begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases}.}$$

6) Comme $(AB) \subset (ABC)$ et $\Delta \perp (ABC)$, on a $\Delta \perp (AB)$, donc (AB) et Δ ne sont pas parallèles.

Appelons H le projeté orthogonal de O sur (ABC). Comme Δ est la perpendiculaire à (ABC) en O, on a $H \in \Delta$ et H est le point d'intersection de Δ et (ABC). Ses coordonnées de H vérifient alors les équations de (ABC) et Δ, soit :

$$\begin{cases} x_H = y_H = z_H \\ x_H + y_H + z_H = a \end{cases} \iff x_H = y_H = z_H = \frac{a}{3}.$$

Or, si (AB) et Δ sont sécantes en un point I, alors $I \in (AB) \subset (ABC)$ et $I \in \Delta$, donc $I = H$.

Alors, comme $H \in (AB)$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ceci donne :

$$\begin{cases} \frac{a}{3} - a = -\lambda(a+1) \\ \frac{a}{3} - 1 = \lambda(a-1) \\ \frac{a}{3} + 1 = 2\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = 3\lambda(a+1) \\ a-3 = 3\lambda(a-1) \\ a+3 = 6\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} 2(6\lambda-3) = 3\lambda[(6\lambda-3)+1] \\ (6\lambda-3)-3 = 3\lambda[(6\lambda-3)-1] \\ a = 6\lambda-3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \\ a = 6\lambda - 3 \end{cases}$$

Or, le discriminant de $3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ vaut $-3 < 0$ donc ce trinôme n'admet pas de racine réelle et ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne peuvent être colinéaires, donc (AB) et Δ ne sont pas sécantes.

Finalement, (AB) et Δ ne sont ni parallèles, ni sécantes donc :

$$\boxed{\Delta \text{ et (AB) ne sont pas coplanaires.}}$$

Si Δ' est la perpendiculaire commune à Δ et (AB), alors Δ' coupe (AB) qui est incluse dans (ABC). Ainsi, Δ' est une droite passant par un point de (ABC) et perpendiculaire à Δ. Comme $\Delta \perp (ABC)$, on a $\Delta' \subset (ABC)$. Comme $\Delta' \cap (ABC) = \{H\}$, on a $\Delta' \cap \Delta = \{H\}$ et ainsi :

$$H \in \Delta'.$$

Par ailleurs, Δ et (AB) sont dirigées respectivement par $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ donc :

$$\Delta' \text{ est dirigée par } \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}.$$

$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}$ est de coordonnées $(a-3, a+3, -2a)$ et on obtient la représentation paramétrique de Δ' :

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{a}{3}+t(a-3) \\ y=\dfrac{a}{3}+t(a+3) \\ z=\dfrac{a}{3}-2at \end{cases}}$$

7) La droite Δ dirigée par $\vec{u}$ et passe par O, donc si le plan *P* contient Δ, on a $O\in P$ et $\vec{u}\in\vec{P}$.

De plus, si (BC) est parallèle à *P*, alors $\overrightarrow{BC}\in\vec{P}$.

Enfin, $\Delta\perp(ABC)$ donc $\Delta\perp(BC)$ ce qui implique que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, donc ces deux vecteurs engendrent $\vec{P}$.

Alors, un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à *P* si et seulement si :

$$\det(\vec{u},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM})=0 \iff \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & -1-a & y \\ 1 & a-1 & z \end{vmatrix}=0.$$

En développant par la règle de Sarrus, on obtient $2ax-(a-3)y-(a+3)z=0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan } P \text{ est } 2ax-(a-3)y-(a+3)z=0.}$$

8) On a $M(x, y, z)\in P\cap\Delta'$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de *P* et les équations paramétriques de Δ', c'est-à-dire si $\exists\, t\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} 2ax-(a-3)y-(a+3)z=0 \\ x=\dfrac{a}{3}+t(a-3) \\ y=\dfrac{a}{3}+t(a+3) \\ z=\dfrac{a}{3}-2at \end{cases}$$

Ceci implique que $2a\left[\dfrac{a}{3}+t(a-3)\right]-(a-3)\left[\dfrac{a}{3}+t(a+3)\right]-(a+3)\left(\dfrac{a}{3}-2at\right)=0$, soit après réduction :

$$3(a^2+3)t=0 \iff t=0$$

car $\forall\, a\in\mathbb{R}$, $3(a^2+3)\neq 0$. On obtient alors $x=y=z=\dfrac{a}{3}$, soit $M=H$. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'intersection de } \Delta' \text{ et } P \text{ est le projeté orthogonal de O sur (ABC), ou encore l'intersection de } \Delta \text{ et (ABC).}}$$

9) Si $a\neq 0$, on a vu que O, A, B et C ne sont pas alignés et si on note V_{OABC} le volume de OABC, on a :

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})\right|.$$

Or, d'après la question 2, $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = a(a^2+3)$ donc :

$$\boxed{V_{OABC} = \frac{|a|(a^2+3)}{6}}$$

Si $M(x,y,z)$ est un point quelconque de l'espace et si V_{MABC} est le volume de MABC, on a :

$$V_{MABC} = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM})\right| = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}\right| = \frac{(a^2+3)\left|x+y+z-a\right|}{6}.$$

Donc :

$$V_{MABC} = V_{OABC} \Leftrightarrow \frac{|a|(a^2+3)}{6} = \frac{(a^2+3)\left|x+y+z-a\right|}{6} \Leftrightarrow |x+y+z-a| = |a| \Leftrightarrow (x+y+z-a)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z-a)^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y+z-a-a)(x+y+z-a+a) = 0 \Leftrightarrow (x+y+z-2a)(x+y+z) = 0.$$

Finalement :

L'ensemble des points M de l'espace tels que MABC a le même volume que OABC est la réunion des deux plans parallèles d'équations $x+y+z=2a$ et $x+y+z=0$.

10) Soit G le centre de gravité de ABC. Pour tout point M de l'espace, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Alors :

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\wedge\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\wedge\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \text{ et } \overrightarrow{MA} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow M\in(AG).$$

Ainsi :

L'ensemble recherché est la droite (AG).

Exercice 4

1) L'équation sans second membre associée à (E_β) est $y''-2iy'+(\beta-1)y=0$ d'équation caractéristique $r^2-2ir+\beta-1=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2i)^2-4(\beta-1) = -4-4\beta+4 = -4\beta$ dont le signe est opposé à celui de β. Il y a donc trois cas :

- $\underline{\beta>0}$.
  On pose $\beta=b^2$ donc $\Delta=-4b^2=(2ib)^2$ et les racines de l'équation caractéristique sont $i(1-b)$ et $i(1+b)$.
  Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t\mapsto\left(\lambda e^{-ibt}+\mu e^{ibt}\right)e^{it}$ avec λ et μ constantes complexes.
- $\underline{\beta=0}$.
  On a alors $\Delta=0$ et l'équation caractéristique admet i pour racine double.
  Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^{it}$ avec λ et μ constantes complexes.
- $\underline{\beta<0}$.
  On pose $\beta=-b^2$ donc $\Delta=4b^2=(2b)^2$ et les racines de l'équation caractéristique sont $i-b$ et $i+b$.
  Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t\mapsto\left(\lambda e^{-bt}+\mu e^{bt}\right)e^{it}$ avec λ et μ constantes complexes.

Cherchons une solution particulière de (E_β). Le second membre est de la forme $P(t)e^{\alpha t}$ avec $P(t)=1$ et $\alpha = i$. Il y ici uniquement deux cas :

- $\underline{\beta \neq 0}$.

  Dans ce cas, $\alpha = i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique car ses racines (soit $i-ib$ et $i+ib$, soit $i-b$ et $i+b$) sont toujours différentes de i quand $\beta \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$. On cherche alors une solution particulière y_P de (E_β) telle que $y_P(t) = Ke^{it}$ avec K constante complexe. On a alors $y_P'(t) = iKe^{it}$ et $y_P''(t) = -Ke^{it}$ et en réinjectant dans (E_β), on obtient $\beta K e^{it} = e^{it}$, soit $K = 1/\beta$. Une solution particulière est donc $t \mapsto e^{it}/\beta$.

- $\underline{\beta = 0}$.

  Dans ce cas, $\alpha = i$ est racine double de l'équation caractéristique et on cherche alors une solution particulière y_P de (E) telle que $y_P(t) = (At^2 + Bt + C)e^{it}$ avec A, B et C constantes complexes. Mais quels que soient B et C, la fonction $t \mapsto (Bt + C)e^{it}$ est solution de l'équation homogène donc on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme plus simple $y_P(t) = At^2e^{it}$. On a $y_P'(t) = 2Ate^{it} + iy_P(t)$ et $y_P''(t) = 2Ae^{it} + 4iAte^{it} - y_P(t)$, donc en réinjectant dans l'équation (E), on obtient $2Ae^{it} = e^{it}$, soit $A = \dfrac{1}{2}$.

  Une solution particulière est alors $t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2e^{it}$.

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Les solutions de } (E_\beta) \text{ sont les fonctions de la forme :}\\
\bullet\quad t \mapsto \left(\lambda e^{-ibt} + \mu e^{ibt} + \dfrac{1}{\beta}\right)e^{it} \text{ si } \beta = b^2 > 0 \ ;\\
\bullet\quad t \mapsto \left(\lambda e^{-bt} + \mu e^{bt} - \dfrac{1}{\beta}\right)e^{it} \text{ si } \beta = -b^2 < 0 \ ;\\
\bullet\quad t \mapsto \left(\dfrac{1}{2}t^2 + \lambda t + \mu\right)e^{it} \text{ si } \beta = 0\\
\text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ constantes complexes.}
\end{array}}$$

2) Soit $(\beta, k, k') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ donné.

Remarquons que si f est une fonction telle que $g : t \mapsto e^{it}f(t)$ est solution de (E_β), alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) = e^{-it}g(t)$. Comme $t \mapsto e^{-it}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi (en tant que produit de telles fonctions) et on a $g(t) = e^{it}f(t)$ donc $g'(t) = e^{it}f'(t) + ie^{it}f(t)$. Alors, $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0) + if(0)$ donc :

$$\begin{cases} f(0) = k \\ f'(0) = k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = k \\ g'(0) = k' + ik \end{cases}$$

L'équation (E_β) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Associée aux conditions initiales $g(0) = k$ et $g'(0) = k' + ik$, on obtient un problème de Cauchy dont on sait qu'il admet une unique solution. Comme la fonction g définit de manière unique la fonction f, on a bien :

$$\boxed{\forall (\beta, k, k') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2,\ \exists! f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \text{ telle que } f(0) = k,\ f'(0) = k' \text{ et } t \mapsto e^{it}f(t) \text{ est solution de } (E_\beta).}$$

De plus, il est clair que si f est à valeurs réelles, alors sa dérivée aussi, donc si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $f(0)$ et $f'(0)$ sont réels.

Réciproquement, supposons que $f(0)=k\in\mathbb{R}$ et $f'(0)=k'\in\mathbb{R}$.

- Si $\beta=b^2>0$, alors d'après la question précédente, on a $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\lambda e^{-ibt}+\mu e^{ibt}+\dfrac{1}{\beta}$ avec λ et μ complexes. Alors :

$$\begin{cases} f(0)=\lambda+\mu+\dfrac{1}{\beta}=k \\ f'(0)=ib(\mu-\lambda)=k' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=k-\dfrac{1}{b^2} \\ \mu-\lambda=-\dfrac{ik'}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{2}\left(k-\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{ik'}{b}\right) \\ \mu=\dfrac{1}{2}\left(k-\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{ik'}{b}\right) \end{cases}$$

  Remarquons que $\mu=\overline{\lambda}$ donc $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\lambda e^{-ibt}+\overline{\lambda}e^{ibt}+\dfrac{1}{\beta}=\lambda e^{-ibt}+\overline{\lambda e^{-ibt}}+\dfrac{1}{\beta}=2\,\mathrm{Re}[\lambda e^{-ibt}]+\dfrac{1}{\beta}\in\mathbb{R}$ et ainsi, f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

  Remarquons enfin que dans ce cas, on a $\forall\, t\in\mathbb{R}$:

$$f(t)=2\,\mathrm{Re}[\lambda e^{-ibt}]+\frac{1}{\beta}=2[\mathrm{Re}(\lambda)\cos bt+\mathrm{Im}(\lambda)\sin bt]+\frac{1}{\beta}=A\cos bt+B\sin bt+\frac{1}{\beta}$$

  avec A et B réels.

- Si $\beta=-b^2<0$, alors d'après la question précédente, on a $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\lambda e^{-bt}+\mu e^{bt}-\dfrac{1}{\beta}$ avec λ et μ complexes. Alors :

$$\begin{cases} f(0)=\lambda+\mu-\dfrac{1}{\beta}=k \\ f'(0)=b(\mu-\lambda)=k' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=k+\dfrac{1}{\beta} \\ \mu-\lambda=\dfrac{k'}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{k'}{b}\right) \\ \mu=\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{k'}{b}\right) \end{cases}$$

  Remarquons que λ et μ sont réels donc $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\lambda e^{-bt}+\mu e^{bt}-\dfrac{1}{\beta}\in\mathbb{R}$ et ainsi, f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Si $\beta=0$, alors d'après la question précédente, on a $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\lambda t+\mu$ avec λ et μ complexes. Alors, on a immédiatement $f(0)=\mu=k\in\mathbb{R}$ et $f'(0)=\lambda=k'\in\mathbb{R}$ donc $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\lambda t+\mu\in\mathbb{R}$ et f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Finalement, la réciproque est vraie dans tous les cas et ainsi :

$$\boxed{\text{f est à valeurs dans } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } f(0)=k \text{ et } f'(0)=k' \text{ sont réels.}}$$

3) $\forall\, x\in\mathbb{R}$, on a $\mathscr{F}_x=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \backslash t\mapsto e^{it}f(t) \text{ est solution de } (E_x)\right\}$. Comme $\mathscr{F}=\bigcup_{\beta\in\mathbb{R}}\mathscr{F}_\beta$, $\forall\, f\in\mathscr{F}$, il existe un réel x tel que $f\in\mathscr{F}_x$. En posant $f(0)=y$ et $f'(0)=z$, et en notant M le point de coordonnées (x,y,z) dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a, par définition de Φ, $\Phi(M)=f$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\Phi \text{ est surjective.}}$$

4) Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}$. D'après les questions précédentes, on sait qu'il existe trois réels b, A et B tels que :

- Si $f \in \mathscr{F}_0$, $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + At + B$.
  La fonction f est donc polynômiale de degré exactement 2.
- Si $f \in \mathscr{F}^+$, $f(t) = A\cos bt + B\sin bt + \frac{1}{b^2}$.
  La fonction f est $2\pi/b$ – périodique donc non polynômiale de degré 2 et $f \notin \mathscr{F}_0$. De plus, f est constante si et seulement si $A = B = 0$ et dans ce cas, c'est la fonction $t \mapsto \frac{1}{b^2}$, à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Si $f \in \mathscr{F}^-$, $f(t) = Ae^{-bt} + Be^{bt} - \frac{1}{b^2}$.
  La fonction f n'est pas polynômiale de degré 2 donc $f \notin \mathscr{F}_0$ et n'est pas périodique sauf si $A = B = 0$ et dans ce cas, c'est la fonction $t \mapsto -\frac{1}{b^2}$, à valeur dans $\mathbb{R}_-^*$ donc $f \notin \mathscr{F}^+$.

Ainsi, f ne peut appartenir simultanément à deux des trois ensembles $\mathscr{F}^-$, $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}^+$, ce qui montre que :

$$\boxed{\text{Les ensembles } \mathscr{F}^-,\ \mathscr{F}_0 \text{ et } \mathscr{F}^+ \text{ sont deux à deux disjoints.}}$$

5) Soient M et M' deux points de $\mathscr{E}$, de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et tels que $\Phi(M) = \Phi(M') = f$.

On a immédiatement $f(0) = y = y'$ et $f'(0) = z = z'$.

D'après la question précédente, $\Phi(M)$ et $\Phi(M')$ étant égales, elles appartiennent soit à $\mathscr{F}_0$ toutes les deux, soit à $\mathscr{F}^+$ toutes les deux, soit à $\mathscr{F}^-$ toutes les deux. Alors :

- Si $\Phi(M) = \Phi(M') = f \in \mathscr{F}_0$, on a directement $x = x' = 0$.
- Si $\Phi(M) = \Phi(M') = f \in \mathscr{F}^+$, alors $x > 0$, $x' > 0$ et il existe quatre réels A, B, A' et B' tels que $\forall\, t \in \mathbb{R}$:
$$f(t) = A\cos\sqrt{x}t + B\sin\sqrt{x}t + \frac{1}{x} = A'\cos\sqrt{x'}t + B'\sin\sqrt{x'}t + \frac{1}{x'}.$$
  Dans ce cas, f est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en évaluant f, f'' et $f^{(4)}$ en 0, on obtient :
$$\begin{cases} f(0) = A + \frac{1}{x} = A' + \frac{1}{x'} \\ f''(0) = -xA = -x'A' \\ f^{(4)}(0) = Ax^2 = Ax'^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{xA+1}{x} = \frac{x'A'+1}{x'} \\ xA = x'A' \\ x^2A = x'^2A' \end{cases}$$
  Si $xA + 1 = x'A' + 1 \neq 0$, alors la 1[ère] équation donne immédiatement $x = x'$ et si $xA + 1 = x'A' + 1 = 0$, alors $xA = x'A' = -1$ donc $x^2A = -x = x'^2A' = -x'$ et à nouveau $x = x'$.
- Si $\Phi(M) = \Phi(M') = f \in \mathscr{F}^-$, alors $x < 0$, $x' < 0$ et il existe quatre réels A, B, A' et B' tels que $\forall\, t \in \mathbb{R}$:
$$f(t) = Ae^{-\sqrt{-x}t} + Be^{\sqrt{-x}t} - \frac{1}{x} = A'e^{-\sqrt{-x'}t} + B'e^{\sqrt{-x'}t} - \frac{1}{x'}.$$

Dans ce cas, f est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en évaluant f, f'' et $f^{(4)}$ en 0, on obtient :

$$\begin{cases} f(0) = A + B - \dfrac{1}{x} = A' + B' - \dfrac{1}{x'} \\ f''(0) = -x(A+B) = -x'(A'+B') \\ f^{(4)}(0) = x^2(A+B) = x'^2(A'+B') \end{cases}$$

Le même raisonnement que ci-dessus (en remplaçant A par $A+B$ et A' par $A'+B'$ donc encore $x = x'$.

Finalement, dans les trois cas, on obtient $x = x'$ et comme on avait déjà $y = y'$ et $z = z'$, on a $M = M'$. Ceci prouve que Φ est injective. Comme on sait qu'elle est surjective :

$$\boxed{\Phi \text{ est bijective.}}$$

6) La relation $\ll$ est une relation d'ordre, donc elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

- $\forall f \in \mathscr{F}$, on a $\Phi^{-1}(f) \in \mathscr{E}$ donc $\Phi^{-1}(f) \ll \Phi^{-1}(f)$ car $\ll$ est réflexive. Alors, on a $f \lhd f$ par définition de $\lhd$. Donc, $\lhd$ est *réflexive*.
- Soit $(f,g) \in \mathscr{F}^2$ tel que $f \lhd g$ et $g \lhd f$. On a alors $\Phi^{-1}(f) \ll \Phi^{-1}(g)$ et $\Phi^{-1}(g) \ll \Phi^{-1}(f)$. Comme $\ll$ est antisymétrique, on a $\Phi^{-1}(f) = \Phi^{-1}(g)$, soit $f = g$. Donc, $\lhd$ est *antisymétrique*.
- Soit $(f,g,h) \in \mathscr{F}^3$ tel que $f \lhd g$ et $g \lhd h$. On a alors $\Phi^{-1}(f) \ll \Phi^{-1}(g)$ et $\Phi^{-1}(g) \ll \Phi^{-1}(h)$. Comme $\ll$ est transitive, on a $\Phi^{-1}(f) \ll \Phi^{-1}(h)$, soit $f \lhd h$. Donc, $\lhd$ est *transitive*.

Ainsi, $\lhd$ est réflexive, antisymétrique et transitive donc c'est une relation d'ordre sur $\mathscr{F}$.

De plus, $\forall (f,g) \in \mathscr{F}^2$, $\left(\Phi^{-1}(f), \Phi^{-1}(g)\right) \in \mathscr{E}^2$ donc $\Phi^{-1}(f)$ et $\Phi^{-1}(g)$ se comparent par $\ll$ car la relation $\ll$ est totale. Mais, alors, par définition de $\lhd$, f et g se comparent par $\lhd$. Ainsi, la relation $\lhd$ est totale.

Finalement :

$$\boxed{\lhd \text{ est une relation d'ordre total sur } \mathscr{F}.}$$

7) Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a $\mathcal{S} = \{M(x,y,z) \setminus x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Or, quels que soient les réels x, y et z, $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$.

De plus, le point $A(1,0,0)$ appartient clairement à $\mathcal{S}$.

Alors, $\forall M(x_M, y_M, z_M) \in \mathcal{S}$, on a $x_M \leq x_A$ et si $x_M = x_A = 1$, on a $x_M{}^2 + y_M{}^2 + z_M{}^2 = 1 \Leftrightarrow y_M{}^2 + z_M{}^2 = 0$, ce qui donne immédiatement $y_M = z_M = 0$.

Ainsi, $\forall M \in \mathcal{S}$, soit $x_M < x_A \Rightarrow M \ll A$, soit $M = A$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ admet un maximum pour } \ll \text{, qui est le point } A(1,0,0).}$$

8) D'après la question précédente, $\forall f \in \Phi(\mathcal{S})$, $\Phi^{-1}(f) \in \mathcal{S}$ donc $\Phi^{-1}(f) \ll A$ et d'après la définition de $\lhd$, on a $f \lhd \Phi(A)$. De plus, $A \in \mathcal{S}$ donc $\Phi(A) \in \Phi(\mathcal{S})$, ce qui prouve que $\Phi(A)$ est le maximum de $\Phi(\mathcal{S})$.

Les coordonnées de A étant $(1,0,0)$, $\Phi(A)$ est l'unique fonction f_o de $\mathscr{F}_1$ telle que $f_o(0) = f_o'(0) = 0$.

D'après la question 2, comme $x_A = 1 > 0$, f_o est de la forme $t \mapsto A\cos t + B\sin t + 1$ avec A et B constantes réelles.

Les contions initiales, donne alors $f_o(0) = A + 1 = 0$ et $f_o'(0) = B = 0$. Ainsi, on a $A = -1$ et $B = 0$, d'où :

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto 1 - \cos t \text{ est le maximum de } \Phi(\mathcal{S}) \text{ pour la relation } \lhd.}$$