

Corrigés des TD du Chapitre 11

Exercice 1

a. Supposons $a \neq 0$, alors $|a| > 0$.

Comme $|a| < \varepsilon$ quelque soit $\varepsilon > 0$, on peut prendre $\varepsilon = |a|$, ce qui donne $|a| < |a|$. Ceci est absurde donc :

$$a = 0$$

b. Supposons que $a > b$, alors $\forall \varepsilon > 0$, on a $|a - b| = a - b < \varepsilon$ et d'après la question précédente, $a - b = 0$, soit $a = b$, ce qui est absurde (car $a > b$). Ainsi :

$$a \leq b$$

Exercice 2

1) Comme B est non vide, il existe $b_0 \in B$. Alors, par hypothèse, $\forall a \in A$, $a \leq b_0$. Ainsi, A est majorée donc :

A admet une borne supérieure.

De même, A est non vide donc, il existe $a_0 \in A$ et par hypothèse, $\forall b \in B$, $a_0 \leq b$. Ainsi, B est minorée donc :

B admet une borne inférieure.

Supposons que $\sup A > \inf B$.

Par définition de $\sup A$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a_\varepsilon$.

En particulier, pour $\varepsilon = \sup A - \inf B > 0$, il existe $a_1 \in A$ tel que $\sup A - (\sup A - \inf B) = \inf B < a_1$.

Par définition de $\inf B$, il existe alors $b_1 \in B$ tel que $\inf B \leq b_1 < a_1$ ce qui contredit l'hypothèse, donc :

$$\sup A \leq \inf B$$

Dans toute la suite, comme A et B sont bornées, elles admettent des bornes inférieures et supérieures.

2) Si $A \subset B$, alors $\forall a \in A$, on a $a \in B$, donc $\inf B \leq a \leq \sup B$.

Ainsi, $\inf B$ et $\sup B$ sont respectivement un minorant et un majorant de A , et donc :

$$\inf B \leq \inf A \quad \text{et} \quad \sup A \leq \sup B$$

3) a. Posons $m = \min\{\inf A, \inf B\}$ et $M = \max\{\sup A, \sup B\}$.

On a $m \leq \inf A$, $m \leq \inf B$, $M \geq \sup A$ et $M \geq \sup B$.

Alors $\forall x \in A \cup B$, on a $x \in A$ ou $x \in B$ donc $\inf A \leq x \leq \sup A$ ou $\inf B \leq x \leq \sup B$, ce qui prouve que :

$$m \leq x \leq M.$$

Donc, $A \cup B$ est bornée par m et M .

De plus, si $m = \inf A$, il existe une suite de A donc de $A \cup B$ qui converge vers $\inf A = m$ et si $m = \inf B$, il existe une suite de B donc de $A \cup B$ qui converge vers $\inf B = m$ donc dans les deux cas, on trouve une suite de $A \cup B$ qui converge vers m , ce qui prouve que :

$$\inf(A \cup B) = m = \min\{\inf A, \inf B\}$$

On prouve de la même façon que :

$$\sup(A \cup B) = M = \max\{\sup A, \sup B\}$$

b. Alors $\forall x \in A \cap B \neq \emptyset$, on a $x \in A$ et $x \in B$ donc $\inf A \leq x \leq \sup A$ et $\inf B \leq x \leq \sup B$, ce qui prouve que :

$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq x \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

Donc, $A \cap B$ est minorée par $\max\{\inf A, \inf B\}$ et majorée par $\min\{\sup A, \sup B\}$ et ainsi :

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\} \text{ et } \inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$$

4) $\forall x \in A + B$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$.

On a alors $\inf A \leq a \leq \sup A$ et $\inf B \leq b \leq \sup B$ donc en additionnant membre à membre, on obtient :

$$\inf A + \inf B \leq x \leq \sup A + \sup B.$$

Donc, $A + B$ est minorée par $\inf A + \inf B$ et majorée par $\sup A + \sup B$.

De plus, il existe deux suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui convergent respectivement vers $\inf A$ et $\sup A$ et il existe deux suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B qui convergent respectivement vers $\inf B$ et $\sup B$.

Alors, les suites $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n + B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\inf A + \inf B$ et $\sup A + \sup B$ donc :

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \text{ et } \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

5) a. On a $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ et $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.

b. Si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$, $\sup(AB) = \sup A \times \sup B$ et $\inf(AB) = \inf A \times \inf B$.

c. Si $A \subset \mathbb{R}_-$ et $B \subset \mathbb{R}_+$, $\sup(AB) = \sup A \times \inf B$ et $\inf(AB) = \inf A \times \sup B$.

d. Si $A \subset \mathbb{R}_-$ et $B \subset \mathbb{R}_-$, $\sup(AB) = \inf A \times \inf B$ et $\inf(AB) = \sup A \times \sup B$.

Exercice 3

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ et remarquons que :

- si n est pair, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1 < a_n = \frac{1}{2k} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$;
- si n est impair, $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $-1 < a_n = \frac{1}{2k + 1} - 1 \leq 0$.

Donc, $\forall a \in A$, $-1 < a \leq \frac{3}{2}$ et A est bornée et comme $a_2 = \frac{3}{2}$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1} = -1$, on a :

$$\boxed{\inf A = -1 \text{ et } \sup A = \max A = \frac{3}{2}}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $b_n = \frac{(-1)^n + 1}{n} + n^2$ et remarquons que :

- si n est pair, $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = \frac{2}{2k} + 4k^2 \geq \frac{2}{2} + 4 = 5$;
- si n est impair, $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a $b_n = (2k+1)^2 \geq 1$.

Donc, $\forall b \in B$, $b \geq b_1 = 1$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ donc B est minorée et mais non majorée et :

$$\boxed{\inf B = \min B = 1 \text{ et } B \text{ n'est pas majorée.}}$$

3) $\forall x > 0$, on a $E(x) > x - 1$ et $E\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x} - 1$ donc :

$$E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right) > x + \frac{1}{x} - 2.$$

Une étude rapide de la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* donne le tableau :

x	0	1	$+\infty$
f	$+\infty$	2	$+\infty$

Ceci implique que $\forall x > 0$:

- $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ donc $E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right) > 0$, soit $E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 = E(1,5) + E\left(\frac{1}{1,5}\right)$ car $E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right)$ est entier ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[E(x) + E\left(\frac{1}{x}\right) \right] = +\infty$ donc C n'est pas majorée.

Finalement :

$$\boxed{\inf C = \min C = 1 \text{ et } C \text{ n'est pas majorée.}}$$

4) $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $-(p+q+1) < p-q < p+q+1$ et avec $p+q+1 > 0$, on obtient $-1 < \frac{p-q}{p+q+1} < 1$ donc D est minorée par -1 et majorée par 1 .

De plus :

- si on pose $q = 0$, on a $\frac{p-q}{p+q+1} = \frac{p}{p+1}$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{p+1} = 1$;
- si on pose $p = 0$, on a $\frac{p-q}{p+q+1} = \frac{-q}{q+1}$ et $\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{-q}{q+1} = -1$.

Donc :

$$\inf D = -1 \text{ et } \sup D = 1$$

$$5) E = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m} \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m \right\}$$

Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq m$.

- Si $n > m$, on a $n-m > 0$ soit $n-m \geq 1$ car $n-m$ est entier. Alors, $0 < \frac{1}{n-m} \leq 1$ donc $0 \leq 1 - \frac{1}{n-m} < 1$.
- Si $n < m$, on a $n-m < 0 \Rightarrow n-m \leq -1$ car $n-m \in \mathbb{Z}$. Alors, $0 < -\frac{1}{n-m} \leq 1$ donc $1 < 1 - \frac{1}{n-m} \leq 2$.

Ceci prouve que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq m$, on a $0 \leq 1 - \frac{1}{n-m} \leq 2$ donc E est bornée.

De plus, $1 - \frac{1}{1-0} = 0$ donc 0 est un minimum de E et $1 - \frac{1}{0-1} = 2$ donc 2 est un maximum de E .

Ainsi :

$$\inf D = \min D = 0 \text{ et } \sup D = \max D = 2$$

Exercice 4

Soit (E) l'équation : $\|x+2| - |2x-1|\| = \|x+1| - |2x-2|\|$. Du fait des valeurs absolues, on a :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (|x+2| - |2x-1|)^2 = (|x+1| - |2x-2|)^2 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (2x-1)^2 - 2|(x+2)(2x-1)| = (x+1)^2 + (2x-2)^2 - 2|(x+1)(2x-2)| \\ &\Leftrightarrow |(x+2)(2x-1)| = 3x + 2|x^2-1| \end{aligned}$$

Faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	-1	0,5	1	$+\infty$
$(x+2)(2x-1)$	+	0	-	-	0	+
x^2-1	+	+	0	-	-	0

On peut alors résumer le problème dans le tableau ci-dessous :

x	(E) devient :	Solutions dans l'intervalle
$] -\infty ; -2]$	$(x+2)(2x-1) = 3x + 2(x^2-1) \Leftrightarrow 0 = 0$	$] -\infty ; -2]$
$] -2 ; -1]$	$-(x+2)(2x-1) = 3x + 2(x^2-1) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$	\emptyset
$] -1 ; 0,5]$	$-(x+2)(2x-1) = 3x - 2(x^2-1) \Leftrightarrow 6x = 0$	0
$] 0,5 ; 1]$	$(x+2)(2x-1) = 3x - 2(x^2-1) \Leftrightarrow x^2 = 1$	1
$] 1 ; +\infty [$	$(x+2)(2x-1) = 3x + 2(x^2-1) \Leftrightarrow 0 = 0$	$] 1 ; +\infty [$

Et finalement :

$$\text{L'ensemble des solutions est }]-\infty ; -2] \cup \{0\} \cup [1 ; +\infty[.$$

Exercice 5

a. Par l'inégalité triangulaire, on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- $|2x| = |x + y + x - y| \leq |x + y| + |x - y|$.
- $|2y| = |y + x + y - x| \leq |y + x| + |y - x| = |x + y| + |x - y|$.

En additionnant membre à membre, on obtient $|2x| + |2y| \leq 2|x + y| + 2|x - y|$, soit en divisant par 2 :

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$

b. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire :

$$xy - 1 = (x - 1 + 1)(y - 1 + 1) - 1 = (x - 1)(y - 1) + (x - 1) + (y - 1).$$

Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$|xy - 1| \leq |x - 1||y - 1| + |x - 1| + |y - 1|.$$

Or, $(1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|) = |x - 1||y - 1| + |x - 1| + |y - 1| + 1$ donc :

$$|xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|) - 1.$$

Soit :

$$1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$$

Exercice 6

Si $I \cap J \neq \emptyset$, il existe $c \in I \cap J$.

Soient maintenant a et b deux réels de $I \cup J$. Pour réel x tel que $a \leq x \leq b$, on a :

- Si $x \leq c$, alors $a \leq x \leq c$ et :
 - si $a \in I$, comme c est dans I qui est un intervalle, on a $x \in I$ donc $x \in I \cup J$;
 - si $a \in J$, comme c est dans J qui est un intervalle, on a $x \in J$ donc $x \in I \cup J$.
- Si $x \geq c$, alors $c \leq x \leq b$ et :
 - si $b \in I$, comme c est dans I qui est un intervalle, on a $x \in I$ donc $x \in I \cup J$;
 - si $b \in J$, comme c est dans J qui est un intervalle, on a $x \in J$ donc $x \in I \cup J$.

Dans tous les cas, $x \in I \cup J$ donc :

$$I \cup J \text{ est un intervalle.}$$

La condition $I \cap J \neq \emptyset$ n'est pas nécessaire pour que $I \cup J$ soit un intervalle.

En effet, si $I = [0; 1]$ et $J =]1; 2]$ alors $I \cap J = \emptyset$ mais $I \cup J = [0; 2]$ est un intervalle.

Exercice 7

1) On a $E(x) \leq x < E(x) + 1$ donc $E(x) + n \leq x + n < E(x) + n + 1$.

Comme $E(x) + n$ et $E(x) + n + 1$ sont deux entiers consécutifs, on a bien :

$$E(x + n) = E(x) + n$$

2) On a :

- $nx - 1 < E(nx) \leq nx$ donc $kx - k < kE(nx) \leq kx$ (1) ;
- $kx - 1 < E(kx) \leq kx$ donc $-nkx \leq -nE(kx) < -nkx + n$ (2).

En additionnant (1) et (2) membres à membres, on obtient :

$$-k < kE(nx) - nE(kx) < n.$$

Or, k , n , $E(kx)$ et $E(nx)$ sont entiers donc $kE(nx) - nE(kx)$ l'est aussi et la double inégalité ci-dessus se réécrit :

$$1 - k \leq kE(nx) - nE(kx) \leq n - 1$$

3) Le résultat ci-dessus donne pour $k = 1$:

$$0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1.$$

Soit en divisant par $n > 0$:

$$0 \leq \frac{E(nx)}{n} - E(x) \leq 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

On tire l'encadrement :

$$E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x) + 1.$$

Comme $E(x)$ et $E(x) + 1$ sont deux entiers consécutifs, on obtient :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

4) Remarquons déjà que pour $n = 1$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = \sum_{k=0}^0 E\left(\frac{x+k}{1}\right) = E(x+0) = E(x)$.

Pour $n > 1$, $\frac{x+n-1}{n} - \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n} \in]0;1[$, ce qui implique que dans $\left] \frac{x}{n}; \frac{x+n-1}{n} \right]$, il y a au plus un entier.

Considérons alors deux cas :

- Il n'y a pas d'entier dans $\left] \frac{x}{n}; \frac{x+n-1}{n} \right]$. Alors, $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E\left(\frac{x}{n}\right)$ et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x}{n}\right) = nE\left(\frac{x}{n}\right).$$

Mais :

$$\left. \begin{array}{l} E\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n} \Rightarrow nE\left(\frac{x}{n}\right) \leq x \\ E\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = E\left(\frac{x}{n}\right) \Rightarrow \frac{x+n-1}{n} < E\left(\frac{x}{n}\right) + 1 \Leftrightarrow x < nE\left(\frac{x}{n}\right) + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow nE\left(\frac{x}{n}\right) \leq x < nE\left(\frac{x}{n}\right) + 1$$

Comme $nE\left(\frac{x}{n}\right)$ et $nE\left(\frac{x}{n}\right) + 1$ sont deux entiers consécutifs, on a $E(x) = nE\left(\frac{x}{n}\right)$ et ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E(x).$$

- Il y a un entier N dans $\left] \frac{x}{n}; \frac{x+n-1}{n} \right]$. Alors, il existe $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ tel que $\frac{x+p-1}{n} < N \leq \frac{x+p}{n}$ et on a, $\forall k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, $E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E\left(\frac{x}{n}\right) = N-1$ et $\forall k \in \llbracket p; n-1 \rrbracket$, $E\left(\frac{x+k}{n}\right) = N = E\left(\frac{x}{n}\right) + 1$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{p-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) + \sum_{k=p}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} E\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{k=p}^{n-1} \left[E\left(\frac{x}{n}\right) + 1 \right] \\ &= pE\left(\frac{x}{n}\right) + (n-p) \left[E\left(\frac{x}{n}\right) + 1 \right] = nE\left(\frac{x}{n}\right) + n-p \end{aligned}$$

Mais :

$$E\left(\frac{x+p-1}{n}\right) = E\left(\frac{x}{n}\right) \Rightarrow \frac{x+p-1}{n} < E\left(\frac{x}{n}\right) + 1 \Leftrightarrow x < nE\left(\frac{x}{n}\right) + n-p+1$$

$$E\left(\frac{x+p}{n}\right) = E\left(\frac{x}{n}\right) + 1 \Rightarrow E\left(\frac{x}{n}\right) + 1 \leq \frac{x+p}{n} \Leftrightarrow nE\left(\frac{x}{n}\right) + n-p \leq x$$

Donc $nE\left(\frac{x}{n}\right) + n-p \leq x < nE\left(\frac{x}{n}\right) + n-p+1$ et comme plus haut, on obtient $E(x) = nE\left(\frac{x}{n}\right) + n-p$ et ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E(x).$$

Finalement, le résultat est le même dans les deux cas, soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E(x)}$$

5) Posons $x = E(x) + \delta_x$ et $y = E(y) + \delta_y$ avec $0 \leq \delta_x < 1$ et $0 \leq \delta_y < 1$.

On a $x + y = E(x) + E(y) + \delta_x + \delta_y$, $2x = 2E(x) + 2\delta_x$ et $2y = 2E(y) + 2\delta_y$.

Considérons les quatre cas de figure :

- $0 \leq \delta_x < \frac{1}{2}$ et $0 \leq \delta_y < \frac{1}{2}$. Alors :
 - $0 \leq \delta_x + \delta_y < 1$ donc $E(x+y) = E(x) + E(y)$.
 - $0 \leq 2\delta_x < 1$ donc $E(2x) = 2E(x)$.
 - $0 \leq 2\delta_y < 1$ donc $E(2y) = 2E(y)$.

Donc $E(x+y) + E(x) + E(y) = 2E(x) + 2E(y) = E(2x) + E(2y)$.

- $\frac{1}{2} \leq \delta_x < 1$ et $0 \leq \delta_y < \frac{1}{2}$.
 - $\frac{1}{2} \leq \delta_x + \delta_y < \frac{3}{2}$ donc $E(x+y) = E(x) + E(y) + \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1 donc $\varepsilon \leq 1$.
 - $1 \leq 2\delta_x < 2$ donc $E(2x) = 2E(x) + 1$.
 - $0 \leq 2\delta_y < 1$ donc $E(2y) = 2E(y)$.

Donc $E(x+y) + E(x) + E(y) = 2E(x) + 2E(y) + \varepsilon \leq 2E(x) + 2E(y) + 1 = E(2x) + E(2y)$.

- $0 \leq \delta_x < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq \delta_y < 1$. Ce cas est identique au précédent en intervertissant x et y .
- $\frac{1}{2} \leq \delta_x < 1$ et $\frac{1}{2} \leq \delta_y < 1$.
 - $1 \leq \delta_x + \delta_y < 2$ donc $E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$
 - $1 \leq 2\delta_x < 2$ donc $E(2x) = 2E(x) + 1$.
 - $1 \leq 2\delta_y < 2$ donc $E(2y) = 2E(y) + 1$.

Donc $E(x+y) + E(x) + E(y) = 2E(x) + 2E(y) + 1 < 2E(x) + 2E(y) + 2 = E(2x) + E(2y)$.

Dans les quatre cas, on obtient toujours :

$$E(x+y) + E(x) + E(y) \leq E(2x) + E(2y)$$

Exercice 8

Comme $E(b) \leq b < E(b) + 1$, on a $[a, b] \cap \mathbb{Z} = [a, E(b)] \cap \mathbb{Z}$.

Pour a , il y a deux possibilités :

- Si a est entier, alors $E(a) = a$ et $[a, b] \cap \mathbb{Z} = [E(a), E(b)] \cap \mathbb{Z} = \llbracket E(a), E(b) \rrbracket$ donc :

$$\text{Card}([a, b] \cap \mathbb{Z}) = E(b) - E(a) + 1 = E(b) - a + 1 = E(b) + E(1-a).$$

- Si a n'est pas entier, alors $E(a) < a < E(a) + 1$ et $[a, b] \cap \mathbb{Z} = [E(a) + 1, E(b)] \cap \mathbb{Z} = \llbracket E(a) + 1, E(b) \rrbracket$ donc :

$$\text{Card}([a, b] \cap \mathbb{Z}) = E(b) - E(a).$$

Mais, comme $E(a) < a < E(a) + 1$, on a $-E(a) < 1 - a < -E(a) + 1$ et donc $E(1-a) = -E(a)$, d'où :

$$\text{Card}([a, b] \cap \mathbb{Z}) = E(b) + E(1-a).$$

Finalement, on obtient bien dans les deux cas :

$$\text{Card}([a, b] \cap \mathbb{Z}) = E(b) + E(1-a)$$

Exercice 9

Commençons par prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$ ne sont pas entiers.

- Pour $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \geq 1 + \sqrt{2} > 1$.

Si $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = p \in \mathbb{N}^*$, alors $\sqrt{n+1} = p - \sqrt{n}$.

En élevant au carré, on obtient $n+1 = (p - \sqrt{n})^2 = p^2 - 2p\sqrt{n} + n$, soit $2p\sqrt{n} = p^2 - 1$.

En élevant à nouveau au carré, on a $4p^2n = (p^2 - 1)^2 = p^4 - 2p^2 + 1$.

Ceci implique que p divise $p^4 - 2p^2 + 1$. Or, p divise $p^4 - 2p^2$, donc p divise 1 soit $p = 1$.

Ainsi, $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = 1$, ce qui contredit le fait que $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 1$. Donc :

$\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ n'est pas entier.

- Si $\sqrt{4n+2} = p \in \mathbb{N}^*$, alors $p^2 = 4n+2 = 2(2n+1)$ donc p^2 est pair, et il en va de même pour p .

On peut alors écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $p^2 = 4k^2 = 2(2n+1)$ soit $2n+1 = 2k^2$, ce qui est absurde car $2n+1$ est impair alors que $2k^2$ est pair. Ainsi :

$$\sqrt{4n+2} \text{ n'est pas entier.}$$

Par ailleurs, comme $\sqrt{4n+2} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \neq 0$, on peut écrire :

$$\sqrt{4n+2} - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = \frac{4n+2 - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2}{\sqrt{4n+2} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{4n+2} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Et comme $2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} \neq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sqrt{4n+2} - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) &= \frac{(2n+1)^2 - 4n(n+1)}{(\sqrt{4n+2} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1})(2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{4n+2} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1})(2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)})} \end{aligned}$$

Il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le second membre de cet égalité est compris strictement entre 0 et 1.

Ceci prouve que $0 < \sqrt{4n+2} - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) < 1$ et donc, qu'il y a au plus un entier compris (strictement, d'après ce que l'on a vu plus haut) entre $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$.

Supposons qu'il existe un entier p strictement compris entre $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$, soit :

$$0 < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < p < \sqrt{4n+2}.$$

En élevant au carré, on obtient :

$$0 < 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} < p^2 < 4n+2 \Rightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < p^2 - (2n+1) < 2n+1.$$

En élevant à nouveau au carré, on obtient :

$$4n^2 + 4n < [p^2 - (2n+1)]^2 < 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow 0 < [p^2 - (2n+1)]^2 - (4n^2 + 4n) < 1.$$

Or, comme n et p sont entiers, $[p^2 - (2n+1)]^2 - (4n^2 + 4n)$ l'est aussi et l'encadrement ci-dessus est absurde (il n'y a aucun entiers strictement compris entre 0 et 1).

Ceci prouve qu'il n'y pas d'entier compris entre $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$, donc que le plus grand entier inférieur à $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ est égale au plus grand entier inférieur à $\sqrt{4n+2}$, soit :

$$\boxed{E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2})}$$

Exercice 10

Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, soit $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

Alors, $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = \frac{p^2}{q^2}$ donc $\sqrt{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{q^2} - 5 \right)$, ce qui veut dire que $\sqrt{6}$ est rationnel donc s'écrit

$\sqrt{6} = \frac{P}{Q}$ avec P et Q entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

Mais alors, $P^2 = 6Q^2$ donc P^2 est pair, ce implique que P est pair, soit $P = 2k$ avec k entier.

Alors, $4k^2 = 6Q^2$ soit $2k^2 = 3Q^2$ et comme $2 \wedge 3 = 1$, le théorème de Gauss assure que Q^2 , donc Q est pair.

Ceci est absurde car P et Q étant premiers entre eux, ils ne peuvent être pairs tous les deux. Donc, $\sqrt{6}$ n'est pas rationnel et par conséquent :

$$\boxed{\sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ n'est pas rationnel.}}$$

On sait que pour tout réel x, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ est une suite de nombres rationnels qui converge vers x, donc si on pose, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{E(10^n \sqrt{2})}{10^n} + \frac{E(10^n \sqrt{3})}{10^n}$$

alors :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite de nombres rationnels qui converge vers } \sqrt{2} + \sqrt{3} .}$$

Exercice 11

Soit f un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$:

- $f(0+0) = f(0) + f(0)$ donne $f(0) = 0$;
- $f(x+x) = f(x) + f(x)$ donne $f(2x) = 2f(x)$;
- $f(2x+x) = f(2x) + f(x)$ donne, avec $f(2x) = 2f(x)$, $f(3x) = 3f(x)$;
- ...

On conjecture alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$. Prouvons-le par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $f(0 \times x) = f(0) = 0 = 0 \times f(x)$ donc la propriété est vraie.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n, soit $f(nx) = nf(x)$. On a alors :

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Donc, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si on pose $f(1) = a$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1) = an$ soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an.$$

Mais, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n-n) = f(0) = 0$ et $f(n-n) = f(n+(-n)) = f(n) + f(-n)$ donc $f(n) + f(-n) = 0$ soit :

$$f(-n) = -f(n) = -an = a(-n).$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = an.$$

De plus, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$.

Alors, $f(qr) = f(p) = ap$ mais aussi $f(qr) = qf(r)$ donc $qf(r) = ap$ soit $f(r) = a \frac{p}{q} = ar$.

Donc :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar.$$

Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge x .

Comme, f est continue sur \mathbb{R} , elle l'est en x donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = f(x)$.

Mais, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ donc $f(r_n) = ar_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ar_n = ax$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax.$$

Réciproquement, il est clair que les fonctions linéaires de la forme $x \mapsto ax$ avec a constante sont des morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Finalement :

Les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ sont les fonctions linéaires de la forme $x \mapsto ax$.

