Corrigés des TD du Chapitre 12

Exercice 1

a) Une récurrence simple montre que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et que la suite est bien définie.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(u_{n+1})^n = n + (u_n)^{n-1} \iff (u_{n+1})^n - (u_n)^{n-1} = n\,.$$

En sommant cette égalité entre 1 et n – 1, on obtient par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left((u_{k+1})^k - (u_k)^{k-1}\right) = (u_n)^{n-1} - (u_1)^0 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Soit :

$$(u_n)^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} + 1\,.$$

Et ainsi, $\forall\, n > 1$:

$$\boxed{u_n = \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)^{\frac{1}{n-1}}}$$

On a alors :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n-1}\ln\left(\frac{n(n-1)+2}{2}\right) = \frac{1}{n-1}\ln\left(n(n-1)+2\right) - \frac{1}{n-1}\ln 2$$
$$= \frac{2\ln n}{n-1} + \frac{1}{n-1}\ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) - \frac{\ln 2}{n-1}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln n}{n-1} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) - \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n-1} = 0\,.$$

Et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

b) Si la suite est bien définie, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} + e^{-n}$, soit $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{-n}$.

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(e^{u_{k+1}} - e^{u_k}) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k} = \sum_{k=0}^{n-1}(e^{-1})^k = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}(1-e^{-n})\,.$$

Mais, par télescopage, $\sum_{k=0}^{n-1}(e^{u_{k+1}} - e^{u_k}) = e^{u_n} - e^{u_0} = e^{u_n} - 1$ donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$:

$$e^{u_n} = 1 + \frac{e}{e-1}(1-e^{-n})\,.$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $n = 0$.

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e^{-n} \leq 1$ donc $e^{u_n} \geq 1$ et on peut passer au logarithme, soit $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \ln\left[1 + \frac{e}{e-1}(1-e^{-n})\right].$$

Cette suite est bien définie et vérifie $u_0 = 0$ et la relation de récurrence donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

On a de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ donc, par opérations, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln\left(1+\dfrac{e}{e-1}\right)$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln\left(\frac{2e-1}{e-1}\right)}$$

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie si $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n \neq 2$. Supposons pour l'instant que c'est la cas.

En admettant aussi que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n \neq 1$, posons $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. On a alors $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2-u_n}{1-(2-u_n)} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1-u_n}{u_n-1} = -1.$$

La suite v est arithmétique de raison – 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0-1} = -1$.

Alors, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_n-1} = -1-n$, soit :

$$\boxed{u_n = \frac{n}{n+1}}$$

Il est clair alors que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ 0 \le u_n < 1$ donc $u_n \neq 2$ et $u_n \neq 1$. Ainsi, les suites u et v sont bien définies.

De plus, on a bien $u_0 = 0$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{n+1}{2(n+1)-n} = \dfrac{n+1}{n+2} = u_{n+1}$ donc la suite vérifie les hypothèses.

Enfin, comme $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{1+1/n}$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

Exercice 2

Si u est constante, alors $u_1 = u_3 = 4(u_1 - 1)$ donc $u_1 = \dfrac{4}{3}$. Posons $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{4}{3}$.

On a alors $v_1 = 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

$\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$v_{3n} = u_{3n} - \frac{4}{3} = 4(u_n - 1) - \frac{4}{3} = 4\left(v_n + \frac{4}{3} - 1\right) - \frac{4}{3} = 4v_n + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 4v_n.$$

La suite v est donc un genre de suite géométrique et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, on a :

$$v_{3n} = 4v_n,\ v_{9n} = 4v_{3n} = 4^2 v_n,\ v_{27n} = 4v_{9n} = 4^3 v_n, \dots$$

On conjecture alors que $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, p\in\mathbb{N}$, $\underline{v_{3^p n} = 4^p v_n}$.

Prouvons cela par récurrence sur p pour n fixé.

- Pour p = 0, $v_{3^0 n} = v_n = 4^0 v_n$ donc le relation est vraie.
- Supposons la relation vraie au rang p.

On a alors $v_{3^{p+1}n} = v_{3(3^p n)} = 4v_{3^p n} = 4(4^p v_n) = 4^{p+1} v_n$ et donc la relation est vraie au rang p + 1.

Ainsi, la relation est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_N \neq 0$.

Alors, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $|v_{3^p N}| = 4^p |v_N|$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} |v_{3^p N}| = \lim\limits_{p\to+\infty} 4^p |v_N| = +\infty$ et la suite extraite $(v_{3^p N})_{p\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Or, la suite u est supposée bornée donc v l'est aussi et toute suite extraite de v est bornée de même. Ceci est en contradiction avec ce que l'on vient de voir donc l'hypothèse $v_N \neq 0$ est absurde et ainsi la suite v est nulle et donc :

$$\boxed{\text{La suite u est constante et tous ses termes valent } \frac{4}{3}}.$$

Exercice 3

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de telles fonctions et :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln x + \frac{x^n}{x} = nx^{n-1}(\ln x + \frac{1}{n}).$$

On obtient alors le tableau de variations :

x	0		$e^{-1/n}$		1
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0
f_n	0	$\searrow$	$f_n(e^{-1/n})$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $f_n(e^{-1/n}) = (e^{-1/n})^n \ln(e^{-1/n}) = -\dfrac{1}{ne}$. Donc :

- f_n est négative sur $]0\,;e^{-1/n}[$ donc elle ne prend pas la valeur 1 sur cet intervalle ;
- Sur $[e^{-1/n}\,;+\infty[$, f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante de $f_n(e^{-1/n}) < 0 < 1$ à $+\infty$ donc le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique réel $x_n \in\,]e^{-1/n}\,;+\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 1$.

Finalement :

$$\boxed{f_n(x) = 1 \text{ admet bien une unique solution réelle } x_n}.$$

b) Remarquons déjà que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-1/n} < 1$ et $f_n(1) = 0 < 1 = f_n(x_n)$.

Comme f_n est strictement croissante sur $[e^{-1/n}\,;+\infty[$ et $e^{-1/n} < 1$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{x_n > 1}$.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) = (x_n)^{n+1}\ln(x_n) = x_n (x_n)^n \ln(x_n) = x_n f_n(x_n) = x_n$ donc :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n > 1 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Et comme x_n et x_{n+1} sont tous deux dans $]1\,;+\infty[$ et f_{n+1} est strictement croissante sur cet intervalle, on a :

$$x_n > x_{n+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 1, elle convergente vers un réel $a \geq 1$.

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 1$.

Mais, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_n) = (x_n)^n \ln(x_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Alors, si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(x_n) = \ln a > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = +\infty$, ce qui est contradictoire avec le résultat précédent et donc a = 1.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$$

Exercice 4

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$ donc u est strictement croissante.

Ceci implique que soit u converge, soit u diverge vers + ∞.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Or, $\forall\, k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ donc $u_{2n} - u_n \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}\left[2n - (n+1) + 1\right]$, soit :

$$u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Alors, si u converge vers une limite finie ℓ, on alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n) = 0$.

Mais, **(1)** implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n) \geq \frac{1}{2}$ ce qui est absurde.

Ainsi, u ne converge pas donc :

$$\boxed{\text{u est strictement croissante et } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

2) On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{(n+1+k)(n+1+k+1)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{(n+k+1)(n+k+2)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} \end{aligned}$$

Et en réindexant la première somme, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+2)(2n+3)}} - \frac{2}{\sqrt{4(n+1)(n+2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+4}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+4}}\right] \end{aligned}$$

Or, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $2n+1<2n+3<2n+4$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\dfrac{1}{\sqrt{2n+4}}>0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}\dfrac{1}{\sqrt{2n+4}}>0$.

Avec $\dfrac{1}{\sqrt{2n+2}}>0$, on obtient, $u_{n+1}-u_n>0$ donc la suite u est strictement croissante.

Par ailleurs, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall\, k\in[\![1,n]\!]$, on a $n+k+1>n+k$ donc :

$$\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}<\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k)}}=\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n}.$$

Alors, $u_n<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}=1$ donc la suite u est majorée. Comme elle est croissante, elle converge.

$$\boxed{\text{u est strictement croissante et convergente.}}$$

3) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall\, k\in[\![1,n]\!]$, $1+\dfrac{k}{n}>1$ donc $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>1$.

La suite u est donc à termes strictement positifs et $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\dfrac{k}{n+1}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}=\left(1+\frac{n+1}{n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+1}\frac{n+k+1}{n+k}\right)=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{\prod_{k=1}^{n}(n+k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{2n+1}{n+1}.$$

On a alors :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\ln\left[2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{2n+1}{n+1}\right]=\ln 2+n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)=f(n).$$

La fonction f définie sur $[1;+\infty[$ est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et :

$$f'(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(2x+1)(x+1)}=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{2}{2x+1}.$$

La fonction f' est dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et :

$$f''(x)=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{4}{(2x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}.$$

Sur $[1;+\infty[$, on a $f''(x)>0$ donc f' est strictement croissante et $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$ donc $f'(x)<0$.

Ainsi, f est décroissante sur $[1;+\infty[$.

De plus :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\left[\ln 2+\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)\right]=\ln 2+\ln 2=\ln 4\\[2ex] \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\lim_{X\to1}\dfrac{X}{1-X}\ln X=-\lim_{X\to1}X\dfrac{\ln X}{X-1}=-1\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln 4-1$$

Donc, $\forall\, x\geq 1$:

$$f(x)>\ln 4-1.$$

En revenant à la suite, on obtient $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) > \ln 4 - 1$, soit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{4}{e} > 1.$$

Ce résultat implique que :

$$\boxed{\text{u est strictement croissante.}}$$

De plus $\forall\, n > 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} > \prod_{k=1}^{n-1} \frac{4}{e}$.

Or, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\cancel{u_2}}{u_1}\frac{\cancel{u_3}}{\cancel{u_2}}\frac{\cancel{u_4}}{\cancel{u_3}}\cdots\frac{\cancel{u_{n-1}}}{\cancel{u_{n-2}}}\frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}} = \frac{u_n}{u_1}$ (c'est une forme de télescopage) et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{4}{e} = \left(\frac{4}{e}\right)^{n-1}$ donc :

$$u_n > \left(\frac{4}{e}\right)^{n-1} u_1 > \left(\frac{4}{e}\right)^{n}.$$

Finalement, comme $\dfrac{4}{e} > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{e}\right)^n = +\infty$ et le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice 5

Par une récurrence immédiate, on montre que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{v_n} > 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_n} > 0.$$

Et ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux strictement croissantes.

Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ou diverge vers l'infini et il en est de même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarquons par ailleurs, que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \neq 0$ donc on peut écrire $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - u_n}$ et :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n} \iff \frac{1}{u_{n+2} - u_{n+1}} = \frac{1}{u_{n+1} - u_n} + \frac{1}{u_n} = \frac{u_n + u_{n+1} - u_n}{u_n(u_{n+1} - u_n)} = \frac{u_{n+1}}{u_n(u_{n+1} - u_n)}.$$

Cette relation se réécrit :

$$u_n(u_{n+1} - u_n) = u_{n+1}(u_{n+2} - u_{n+1}).$$

Donc la suite w définie par $w_n = u_n(u_{n+1} - u_n)$ est constante.

Supposons maintenant que u converge vers un réel a. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n(u_{n+1} - u_n) = a(a-a) = 0.$$

Et comme w est constante, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = 0$ soit $u_n(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Mais $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $u_n \neq 0$ et $u_n(u_{n+1} - u_n) = 0 \iff u_{n+1} = u_n$. Donc u est constante, ce qui contredit le fait qu'elle est strictement croissante.

L'hypothèse de la convergence de u est donc absurde et ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Comme u et v jouent le même rôle, on prouve de la même façon que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

Exercice 6

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+2} + u_n = \sin\big((n+2)\alpha\big) + \sin(n\alpha) = 2\sin\left(\frac{(n+2)\alpha + n\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+2)\alpha - n\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sin\big((n+1)\alpha\big)\cos\alpha = u_{n+2} = 2(\cos\alpha)\,u_{n+1}$$

Donc on a bien, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_{n+2} = 2(\cos\alpha)\,u_{n+1} - u_n}$$

Si u converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors en passant à la limite dans la relation précédente, on obtient :

$$\ell = 2(\cos\alpha)\,\ell - \ell \iff \ell = (\cos\alpha)\,\ell\,.$$

Ceci implique que :

$$\boxed{\text{Soit } \cos\alpha = 0\,,\ \text{soit } \ell = 0\,.}$$

2) Si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, on peut écrire $\alpha = \dfrac{p\pi}{q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et p et q premiers entre eux.

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2q} = \sin\big((n+2q)\alpha\big) = \sin(n\alpha + 2p\pi) = \sin(n\alpha) = u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 2q-périodique.

De plus :

- si $q = 1$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin(n\alpha) = \sin(np\pi) = 0$ donc la suite u est la suite nulle ;
- si $q > 1$, alors $u_0 = \sin 0 = 0$ et $u_n = \sin\alpha = \sin\dfrac{p\pi}{q} \neq 0$ car $\dfrac{p}{q}$ n'est pas entier.

Finalement :

$$\boxed{\text{Si } \alpha \in \pi\mathbb{Z}\text{, u est nulle et si } \alpha \in \pi(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})\text{, u est périodique non constante.}}$$

3) On suppose maintenant que $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. On a alors $\cos\alpha \neq 0$, et si u converge, c'est vers 0.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin\big((n+1)\alpha\big) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha = (\cos\alpha)u_n + \cos(n\alpha)\sin\alpha$ soit :

$$[u_{n+1} - (\cos\alpha)u_n]^2 = \cos^2(n\alpha)\sin^2\alpha = (1 - u_n{}^2)\sin^2\alpha\,.$$

En supposant que u converge vers 0, on a en passant à la limite dans la relation ci-dessus, on obtient :

$$\sin^2\alpha = 0\,.$$

Ceci est absurde car $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$ donc $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ et $\sin\alpha \neq 0$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \alpha \notin \pi\mathbb{Q}\text{, u ne converge pas.}}$$

Exercice 7

a) On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, soit $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall\, n \geq N,\ \ell - \varepsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon$.

Supposons dans un premier temps que $0 \leq \ell < 1$:

- Si $\ell = 0$, posons $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ on a alors, $\forall\, n \geq N,\ 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1}{2}$.
- Si $0 < \ell < 1$:
  - pour $\varepsilon_1 = \dfrac{\ell}{2} > 0,\ \exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N_1,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \ell - \dfrac{\ell}{2} > 0$.
  - pour $\varepsilon_2 = \dfrac{1-\ell}{2} > 0,\ \exists\, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N_2,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \dfrac{1-\ell}{2} = \dfrac{1+\ell}{2}$.

  Donc en posant $N = \max(N_1, N_2)$, on a $\forall\, n \geq N,\ 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1+\ell}{2}$.

Finalement, en posant $k = \dfrac{1}{2}$ pour $\ell = 0$ et $k = \dfrac{1+\ell}{2}$ pour $0 < \ell < 1$, on a dans les deux cas $0 < k < 1$ et :

$$\forall\, n \geq N,\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < k.$$

On peu alors écrire par télescopage dans le produit, $\forall\, n > N$:

$$0 < \frac{u_n}{u_N} = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} < \prod_{k=N}^{n-1} k = k^{n-N} \Rightarrow 0 < u_n < u_N k^{n-N}.$$

Or, comme $0 < k < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_N k^{n-N} = 0$ donc par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \text{ si } 0 \leq \ell < 1}$$

Supposons maintenant que $\ell > 1$.

En posant $\varepsilon = \dfrac{\ell - 1}{2} > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \ell - \dfrac{\ell - 1}{2} = \dfrac{\ell + 1}{2} > 1$.

Alors, come plus haut, on obtient $\dfrac{u_n}{u_N} > \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N}$, soit $u_n > \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N$.

Or, comme $\dfrac{\ell+1}{2} > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_N \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} = +\infty$ donc par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \text{ si } \ell > 1}$$

b) Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure. En effet :

- Si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = n + 1 > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 8

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1. Alors $\exists\, A>0$ tel que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\exists\, p_n\geq n$, $|u_{p_n}-1|>A$.

Comme $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq 1$, on $|u_{p_n}-1|>A$ se récrit $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_{p_n}<1-A$.

Comme $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $0\leq v_n\leq 1$, on a alors $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_{p_n}v_{p_n}<(1-A)v_{p_n}\leq 1-A$.

Ainsi, $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$0\leq u_{p_n}v_{p_n}<1-A \quad \textbf{(1)}.$$

Mais, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $p_n\geq n$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{p_n}v_{p_n}=1$.

Ceci implique que pour $A>0$, $\exists\, N\in\mathbb{N}$, tel que $\forall\, n\geq N$, $1-A<u_{p_n}v_{p_n}$, ce qui contredit le résultat **(1)**.

Donc l'hypothèse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1 est absurde et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

Les suites u et v jouant le même rôle, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=1}$$

Exercice 9

1) Posons $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$, soit $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, N_1\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n\geq N_1$, $|u_n-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

On a $\forall\, N\in\mathbb{N}^*$, $|v_n-\ell|=\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k-\ell\right|=\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ell\right|=\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k-\ell)\right|\leq\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|u_k-\ell|$.

Alors $\forall\, n\geq N_1$, on peut écrire :

$$|v_n-\ell|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k-\ell|+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|u_k-\ell|<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k-\ell|+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k-\ell|+\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais $0\leq\dfrac{n-N_1}{n}<1$ donc $\forall\, n\geq N_1$:

$$|v_n-\ell|<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k-\ell|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais, comme N_1 est fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_1}|u_k-\ell|=0$, soit $\exists\, N_2\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n\geq N_2$, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_1}|u_k-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

On obtient, $\forall\, n\geq N=\max(N_1,N_2)$, $|v_n-\ell|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Finalement, $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n\geq N$, $|v_n-\ell|<\varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell}$$

2) Il suffit ici de donner un contre exemple. Si on pose $u_n=(-1)^n$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas.}}$$

Mais, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ vaut $-\dfrac{1}{n}$ si n est impair et 0 si n est pair, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n=0}$$

3) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\forall\, A>0$, $\exists\, N\in\mathbb{N}$, tel que $\forall\, n\geq N$, $u_n>A+1$.

On a alors $\forall\, n\geq N+1$, $v_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}u_k+\dfrac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}u_k$ donc :

$$v_n>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}u_k+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(A+1)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}u_k+\frac{N-n}{n}(A+1)=A+1+\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{N}u_k-N(A+1)\right).$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N}u_k-NA\right)=0$ donc $\exists\, N'\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\, n\geq N'$, $\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N}u_k-NA\right)>-1$.

Alors, en posant $N''=\max(N+1,N')\in\mathbb{N}$, on a $\forall\, n\geq N''$, $v_n>A$.

Ainsi, $\forall\, A>0$, $\exists\, N''\in\mathbb{N}$, tel que $\forall\, n\geq N''$, $v_n>A$, soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty}$$

Posons maintenant, $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=\begin{cases} n & \text{si n est pair}\\ 1 & \text{si n est impair}\end{cases}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}=1$, ce qui prouve que u ne diverge pas vers $+\infty$. Mais $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

- $v_{2n}=\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}u_k=\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}u_{2k}+\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}u_{2k-1}=\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}2k+\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}1=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\dfrac{1}{2n}n=\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{n+2}{2}$.
- $v_{2n+1}=\dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}u_k=\dfrac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}u_k+\dfrac{1}{2n+1}u_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}v_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{n(n+2)+1}{2n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{2n+1}$.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty\text{, on n'a pas forcément } \lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty.}$$

4) Supposons que u converge vers ℓ. Comme $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$, on a $\ell\geq 0$.

De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $v_n>0$ et on peut écrire :

$$\ln v_n=\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}u_k}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}u_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln u_k\,.$$

Comme u converge vers $\ell\geq 0$, il faut distinguer deux cas :

- Si $\ell=0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=-\infty$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\ln u_n)=+\infty$ et d'après la question 3, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\ln v_n)=+\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln v_n=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0=\ell$.

- Si $\ell > 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = \ln \ell$ (par continuité de la fonction ln) et d'après la question 1, $\lim_{n \to +\infty} \ln v_n = \ln \ell$.
  Par continuité de la fonction exponentielle, on a alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = e^{\ln \ell} = \ell$.

Finalement dans les deux cas, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell}$$

Exercice 10

Remarquons déjà que si u est croissante alors v aussi.

a) Posons $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$, soit $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$.

De plus, comme v est croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \ell$ (en effet, dans le cas contraire, il existerait $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_o} > \ell$, mais par croissance de v, on aurait $\forall n \geq n_o$, $v_n \geq v_{n_o}$ et en passant à la limite, $\ell \geq v_{n_o} > \ell$, ce qui est absurde).

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\ell - \varepsilon < v_n \leq \ell$.

Or, comme $v = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de u, la fonction φ est strictement croissante vers l'infini $\forall n \geq \varphi(N)$, $\exists k_n \geq N$ tel que $k_n \leq n < k_n + 1$.

Or, u est croissante donc $\forall n \geq \varphi(N)$, on a $u_{\varphi(k_n)} \leq u_n < u_{\varphi(k_n+1)}$ soit $v_{k_n} \leq u_n \leq v_{k_n+1}$.

Mais alors, $\forall n \geq \varphi(N)$, on a $k_n \geq N$ donc $\ell - \varepsilon < v_{k_n}$ et $v_{k_n+1} \leq \ell$ d'où $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N' = \varphi(N) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N'$, $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell$, soit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell}$$

b) Si $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $v_n > A$.

Mais, comme dans la question précédente, $\forall n \geq \varphi(N)$, $\exists k_n \geq N$ tel que $k_n \leq n < k_n + 1$.

Et, comme u est croissante, on a $u_n \geq u_{\varphi(k_n)}$. Or, $k_n \geq N$ donc $u_{\varphi(k_n)} = v_{k_n} > A$ donc $\forall n \geq \varphi(N)$, $u_n > A$.

Ainsi, $\forall A > 0$, $\exists N' = \varphi(N) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N'$, $u_n > A$, soit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice 11

1) a. Prouvons par récurrence sur n que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ existe.

Initialisation : A est une partie non vide (car non majorée) de $\mathbb{N}$ donc elle admet un plus petit élément.
Ainsi, $\varphi(0) = \min A$ existe.

Hérédité : Supposons que $\varphi(n)$ existe.

Alors $\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et comme A n'est pas majorée, $A\cap\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}$ est aussi une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément.

Ainsi, $\varphi(n+1)=\min\left[A\cap\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}\right]$ existe.

La propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie pour tout n et ainsi, φ est bien définie sur $\mathbb{N}$.

On vient de voir que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)$ est le minimum d'un ensemble d'entiers naturels, donc $\varphi(n)$ c'est un entier naturel et ainsi, φ est à valeurs dans n.

De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)=\min\left[A\cap\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}\right]$ donc $\varphi(n+1)\in A\cap\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}$.

Or, $A\cap\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}\subset\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}$ donc $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)\in\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}$, ce qui implique que $\varphi(n+1)\geq\varphi(n)+1$ et donc que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)>\varphi(n)$. Ainsi, φ est strictement croissante.

Enfin, comme φ est strictement croissante, la suite infinie d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc elle diverge vers + ∞.

Finalement :

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } \mathbb{N}\text{, à valeurs dans } \mathbb{N}\text{, strictement croissante et que } \lim_{n\to+\infty}\varphi(n)=+\infty.}$$

b. D'après la question précédente $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de u.

De plus, $\varphi(0)=\min A$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)=\min\left[A\cap\{k\in\mathbb{N}\setminus k\geq\varphi(n)+1\}\right]$ donc $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\in A$.

Ceci implique, par définition de A que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, k\geq\varphi(n)$, $u_k\leq u_{\varphi(n)}$.

Or, on sait que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)>\varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n+1)}\leq u_{\varphi(n)}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi et elle est en particulier minorée. Comme elle décroît, on en conclut que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}\text{, extraite de u, est convergente.}}$$

2) a. Si A est vide alors $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\notin A$ donc on peut prendre $N=0$.

Si A est non vide mais majorée, alors elle possède un plus grand élément M. Alors, $\forall\, n>M$, $n\notin A$ et on peut prendre $N=M+1$.

b. On a alors $\forall\, n\geq N$, $n\notin A$ donc $\exists\, k_n>n$ tel que $u_{k_n}>u_n$. Posons $f(n)=k_n$.

Par construction, f est définie sur $\{n\in\mathbb{N}\setminus n\geq N\}$, à images dans cet ensemble et $\forall\, n\geq N$, on a $f(n)>n$.

Posons alors $\varphi(0)=f(N)$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)=f(\varphi(n))$.

Comme $\varphi(0)\geq N$ et $\forall\, n\geq N$, $\varphi(n+1)=f(\varphi(n))\geq N$, la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. De plus, par définition de f, on a $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)=f(\varphi(n))>\varphi(n)$ donc $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Enfin, comme plus haut, la suite infinie d'entiers $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc elle diverge vers + ∞ et $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de u.

Mais, on a $\forall\, n\geq N$, $u_{f(n)}>u_n$ (par définition de f) donc $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geq N$ et $u_{\varphi(n+1)}=u_{f(\varphi(n))}>u_{\varphi(n)}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

Mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi et elle est en particulier majorée. Comme elle croît, on en conclut que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}\text{, extraite de u, est convergente.}}$$

Exercice 12

$\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n+u_{n+1}+u_{n+2}=n$ **(1)**.

Posons $u_0=a$ et $u_1=b$. Comme $u_0+u_1+u_2=0$, on a alors $u_2=-(a+b)$.

Si l'on écrit la formule de récurrence de la suite u au rang $n+1$, on a $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}=n+1$ **(2)**.

En faisant alors **(2)** – **(1)**, on obtient $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}-u_n=1$.

Ceci prouve que les trois suites extraites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ sont arithmétiques de raison 1, donc :

$$\boxed{u_{3n}=n+a,\ u_{3n+1}=n+b \text{ et } u_{3n+2}=n-(a+b)}$$

Exercice 13

Appelons mois 0, le mois où Nancy commence son commerce, puis mois 1, 2,…, n les mois suivants. On pose :

- R_n = montant des ses recettes le mois n ;
- D_n = montant de ses recettes le mois n ;
- B_n = bénéfice net (positif ou négatif) le mois n = $R_n - D_n$.
- E_n = Montant des économies de Nancy le mois n.

On a :

- R_n = Pension le mois n + Bénéfice des ventes de plantes le mois n.

  Le montant de la pension est fixe et vaut chaque mois 2550 $ par contre, le bénéfice des ventes augmente de 0,4 % par mois donc il est multiplié par 1,004 chaque mois. Ceci correspond à une suite géométrique de raison 1,004 et de premier terme 1000, donc le bénéfice des ventes au mois n vaut $1000\times1{,}004^n$. Finalement, on obtient bien $R_n = 2550 + 1000\times1{,}004^n$.

- D_n = Montant du remboursement de l'emprunt le mois n + Dépenses familiales le mois n.

  Le montant du remboursement de l'emprunt est fixe et vaut 1000 $. Par contre, les dépenses familiales augmentent de 0,4 % par mois et sont donc multipliées par 1,004 chaque mois. On est à nouveau en présence d'une suite géométrique de raison 1,004 et de premier terme 2500 donc, les dépenses familiales le mois n se montent à $2500\times1{,}004^n$ et enfin, $D_n = 1000 + 2500\times1{,}004^n$.

On a alors :

$$B_n = R_n - D_n = (2550 + 1000\times1{,}004^n) - (1000 + 2500\times1{,}004^n) = 1550 - 1500\times1{,}004^n$$

On cherche la plus petite valeur de n telle que $B_n < 0$ soit $1{,}004^n > \dfrac{31}{30} \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(31/30)}{\ln(1{,}004)} \approx 8{,}2$.

Donc :

$$\boxed{\text{Le premier mois déficitaire pour Nancy en économisant ses bénéfices est le mois 9.}}$$

Le mois n, le montant des économies de Nancy est E_n. Le mois suivant, elle réalise un bénéfice de B_n. Si ce bénéfice est positif, il s'ajoute à E_n ; s'il est négatif, Nancy ponctionne dans ses économies donc retranche $|B_n|$ à E_n ce qui revient à ajouter B_n (car comme $B_n < 0$, $+ B_n = - |B_n|$). Dans les deux cas, on obtient la même la relation : $E_{n+1} = E_n + B_n$.

La relation précédente peut se réécrire pour $n > 0$, $E_n - E_{n-1} = B_{n-1}$ et $E_o = 0$ (Nancy n'a initialement aucune économie). Alors, par télescopage :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1}(1550 - 1500\times 1,004^k) = 1550n - \frac{1500}{0,004}(1,004^n - 1).$$

Nancy devient déficitaire en utilisant ses économies dès que $E_n < 0$ soit :

$$1550n - \frac{1500}{0,004}(1,004^n - 1) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1,004^n - 1}{n} > \frac{1550\times 0,004}{1500} = \frac{31}{7500} > \frac{31}{7500}.$$

A l'aide de la calculatrice, on obtient $\dfrac{1,004^{17}-1}{17} < \dfrac{31}{7500}$ et $\dfrac{1,004^{18}-1}{18} > \dfrac{31}{7500}$ donc :

$$\boxed{\text{Le premier mois déficitaire pour Nancy en dépensant ses bénéfices le mois 18.}}$$

On a $R_{18} = 2550 + 1000\text{x}1,004^{18} \approx 3624,50$ \$ et $D_{18} = 1000 + 2500\text{x}1,004^{18} \approx 3686,25$ \$.

Les dépenses totales le mois 18 se montent à 3686,25 \$ donc les dépenses familiales ce mois-ci s'élèvent à $3686,25 - 1000 = 2686,25$ \$.

Re-numérotons le mois 18 en mois 0. Le nouveau bénéfice B_n est alors donné par :

$$B_n = R_n - D_n = (2550 + b\text{x}1,004^n) - (1000 + 2686,25\text{x}1,004^n) = 1550 - (2686,25 - b)\text{x}1,004^n$$

On cherche b afin que $B_n > 0$ pour tout n, ce qui revient à $(2686,25 - b)\text{x}1,004^n < 1550$ pour tout n.

Or, comme $1,004 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,004^n = +\infty$ donc si $2686,25 - b > 0$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} (2686,25 - b)\text{x}1,004^n = +\infty$

et ainsi $(2686,25 - b)\text{x}1,004^n$ dépassera 1550 à partir d'un certain rang. Il faut donc que $2686,25 - b \leq 0$ soit $b \geq 2686,25$.

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour n'être plus jamais déficitaire, il faut que le nouveau bénéfice des}\\ \text{ventes de Nancy soit au moins de 2686,25 \$ le premier mois.}\end{array}}$$

Exercice 14

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, on a $0 \leq \dfrac{k^5}{n^5} \leq 1$ et $\dfrac{u_n}{n^5} = \dfrac{1}{n^5}\sum\limits_{k=1}^{n} k^5 = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^5}{n^5}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \dfrac{u_n}{n^5} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$ soit :

$$0 \leq \frac{u_n}{n^6} \leq 1 \quad\text{et}\quad 0 \leq \frac{u_n}{n^7} \leq \frac{1}{n}.$$

Le premier encadrement prouve que :

$$\boxed{u_n = O(n^6)}$$

Le second encadrement permet de conclure à l'aide du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{n^7} = 0$, soit :

$$\boxed{u_n = o(n^7)}$$

Exercice 15

a) On a $\ln(1+n) \sim \ln n$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc :

$$\boxed{u_n \sim \frac{\ln n}{n}}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\sqrt{4n+1}-2\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3}-n\sqrt{n}} = \dfrac{(4n+1-4n)(\sqrt{(n+1)^3}+n\sqrt{n})}{[(n+1)^3-n^3](\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})} = \dfrac{\sqrt{(n+1)^3}+n\sqrt{n}}{(3n^2+3n+1)(\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n})}$.

Or :

- $\sqrt{(n+1)^3}+n\sqrt{n} = n\sqrt{n}\left[\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}+1\right] \sim 2n\sqrt{n}$;
- $3n^2+3n+1 \sim 3n^2$;
- $\sqrt{4n+1}+2\sqrt{n} = 2\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+1\right] \sim 4\sqrt{n}$.

Donc $u_n \sim \dfrac{2n\sqrt{n}}{(3n^2)(4\sqrt{n})}$, soit :

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{6n}}$$

c) On sait que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \beta \in \mathbb{R}$, on a :

- $n^\alpha = o(a^n)$ si $a > 1$;
- $a^n = o(n^\alpha)$ si $a < 1$;
- $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ si $\alpha > 0$;
- $n^\alpha = o((\ln n)^\beta)$ si $\alpha < 0$.

Considérons alors trois cas :

- $\underline{a > 1}$: $u_n \sim \dfrac{a^n}{(\ln n)^\beta + n^\alpha}$ et :

$\alpha > 0$	$\alpha = 0$			$\alpha < 0$
$\forall \beta$	$\beta > 0$	$\beta = 0$	$\beta < 0$	$\forall \beta$
$u_n \sim \frac{a^n}{n^\alpha}$	$u_n \sim \frac{a^n}{(\ln n)^\beta}$	$u_n \sim \frac{a^n}{2}$	$u_n \sim a^n$	$u_n \sim \frac{a^n}{(\ln n)^\beta}$

- $\underline{a = 1}$: $u_n = \dfrac{2 + n^\alpha}{(\ln n)^\beta + n^\alpha}$ et :

$\alpha > 0$	$\alpha = 0$			$\alpha < 0$
$\forall \beta$	$\beta > 0$	$\beta = 0$	$\beta < 0$	$\forall \beta$
$u_n \sim 1$	$u_n \sim \frac{3}{(\ln n)^\beta}$	$u_n = 1$	$u_n \sim 3$	$u_n \sim \frac{2}{(\ln n)^\beta}$

- $\underline{a<1}$: $u_n \sim \dfrac{1+n^\alpha}{(\ln n)^\beta + n^\alpha}$ et :

$\alpha>0$	$\alpha=0$			$\alpha<0$
$\forall\beta$	$\beta>0$	$\beta=0$	$\beta<0$	$\forall\beta$
$u_n \sim 1$	$u_n \sim \dfrac{2}{(\ln n)^\beta}$	$u_n \sim 1$	$u_n \sim 2$	$u_n \sim \dfrac{1}{(\ln n)^\beta}$

Exercice 16

a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ donc $u_n = \dfrac{(2n)!^2}{(n!)^4 2^{4n}} > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!^2 (n!)^4 2^{4n}}{(2n)!^2((n+1)!)^4 2^{4n+4}} = \frac{(2n+2)^2(2n+1)^2}{(n+1)^4 2^4} = \frac{4(n+1)^2(2n+1)^2}{16(n+1)^4} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}.$$

Pour a > 0, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $n+a>0$ donc $v_n>0$ et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1+a)u_{n+1}}{(n+a)u_n} = \frac{(n+1+a)(2n+1)^2}{(n+a)(2n+2)^2}.$$

On a :

$$\begin{aligned}(n+1+a)(2n+1)^2-(n+a)(2n+2)^2 &= (2n+1)^2-(n+a)\left[(2n+2)^2-(2n+1)^2\right]\\ &= (2n+1)^2-(n+a)(4n+3)\\ &= (1-4a)n+1-3a\end{aligned}$$

Alors :

- Si $1-4a\geq 0 \Leftrightarrow a\leq\dfrac{1}{4}$, on a $1-3a\geq\dfrac{1}{4}>0$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1+a)(2n+1)^2>(n+a)(2n+2)^2$.
- Si $1-4a<0 \Leftrightarrow a>\dfrac{1}{4}$, on a $(n+1+a)(2n+1)^2<(n+a)(2n+2)^2$ à partir d'un certain rang (il faut que $n>\dfrac{1-3a}{4a-1}$ et $1-3a$ n'est pas forcément négatif).

Finalement :

- Si $a\leq\dfrac{1}{4}$, (v_n) est croissante ;
- Si $a>\dfrac{1}{4}$, (v_n) est décroissante (à partir d'un certain rang si $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{3}$).

b) Prenons $a=1$. On est alors dans la seconde situation et la suite (v_n) est décroissante. Or, elle est minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\lambda\geq 0$.

Prenons $a'=0$. On est alors dans la première situation et la suite (v_n') est croissante donc $\forall n\geq 1$, $v_n'\geq v_1'$.

Or, $\forall n\geq 1$, $v_n = nu_n + u_n = v_n' + u_n$ et comme $u_n>0$, on a $v_n > v_n' \geq v_1'$ et $v_1' = \dfrac{1}{4}$ donc $\forall n\geq 1$, $v_n>\dfrac{1}{4}$.

Ceci implique que $\lambda\geq\dfrac{1}{4}$ donc $\lambda\neq 0$. Alors, $u_n = \dfrac{v_n}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nu_n}{\lambda} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{nv_n}{(n+1)\lambda} = 1$ soit :

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}}$$

Exercice 17

Remarquons déjà que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jouent le même rôle dans l'énoncé.

a) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, on a $e^{a_n}+e^{b_n}+e^{c_n}>e^{a_n}$ donc $a_n<\ln(e^{a_n}+e^{b_n}+e^{c_n})$. Or, la suite $\left(\ln(e^{a_n}+e^{b_n}+e^{c_n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln 3$ donc est majorée. Ceci prouve que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

De la même façon, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorées.

Soient alors, M_a, M_b et M_c des majorants de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement. Les trois suites sont alors majorées par $M=\max(M_a,M_b,M_c)$.

$\forall\, n\in\mathbb{N}$, on a $a_n+b_n+c_n\le a_n+M+M$ donc $a_n+b_n+c_n-2M\le a_n$. Or, la suite $\left(a_n+b_n+c_n-2M\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-2M$ donc est minorée. Ceci prouve que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

De la même façon, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont minorées.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bornées.}}$$

b) Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers a, b et c. Alors :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n+c_n)=0$ donc $a+b+c=0$ et $e^a e^b e^c=e^{a+b+c}=1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{a_n}+e^{b_n}+e^{c_n})=3$ donc $e^c+e^b+e^c=3$.

Posons $A=e^a>0$, $B=e^b>0$ et $C=e^c>0$. On a alors :

$$\begin{cases} ABC=1 \\ A+B+C=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB=\dfrac{1}{C} \\ A+B=3-C \end{cases}$$

Ainsi, A et B sont les racines du trinôme $x^2-(3-C)x+\dfrac{1}{C}$. Ceci veut dire que ce trinôme possède deux racines réelles, donc que son discriminant est positif, soit $(3-C)^2-\dfrac{4}{C}\ge 0 \Leftrightarrow \underline{(3-C)^2C-4\ge 0}$ car $C>0$. Or :

$$(3-C)^2C-4=C^3-6C^2+9C-4=C^3-C^2-5C^2+5C+4C-4=(C-1)^2(C-4).$$

Remarquons par ailleurs que $3-C=A+B>0$ donc $0<C<3$ et donc $(C-1)^2(C-4)\le 0$ soit $\underline{(3-C)^2C-4\le 0}$.

Ainsi, $(3-C)^2C-4=(C-1)^2(C-4)=0$ avec $0<C<3$, soit $\underline{C=1}$.

Alors, A et B sont les racines de $x^2-2x+1=(x-1)^2$ donc $\underline{A=B=C=1}$, soit $\underline{a=b=c=\ln 1=0}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Si } (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent, alors c'est vers la même limite : 0.}}$$

c) De toute suite bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente, donc :

- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel a.

- La suite $(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée donc on peut en extraire une sous-suite $(b_{\theta(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un réel b. La suite $(a_{\theta(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ donc elle converge vers a, car si une suite converge, alors toute suite extraite converge vers la même limite.
- La suite $(c_{\theta(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$, extraite de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée donc admet une sous-suite $(c_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un réel c et les suites extraites $(a_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers a et b respectivement.

De plus, les suites convergentes $(a_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$ étant respectivement extraites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la *même* fonction : $\Psi\circ\theta\circ\varphi$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{\Psi\circ\theta\circ\varphi(n)}+b_{\Psi\circ\theta\circ\varphi(n)}+c_{\Psi\circ\theta\circ\varphi(n)})=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}(e^{a_{\Psi\circ\theta\circ\varphi(n)}}+e^{b_{\Psi\circ\theta\circ\varphi(n)}}+e^{c_{\Psi\circ\theta\circ\varphi(n)}})=3.$$

Alors, d'après la question précédente, $(a_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{\Psi[\theta(\varphi(n))]})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les trois vers 0 et en particulier $a=0$.

Nous venons donc de prouver que :

Toute sous-suite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, converge vers 0.

Or, si toutes les suites extraites convergentes d'une suite convergent vers la même limite alors la suite converge, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On prouve de la même façon que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et finalement, les trois suites convergent et d'après la question précédente, leur limite est nulle.

Finalement :

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers 0.}}$$