

DS de Mathématiques n° 3

4 heures

Calculatrices interdites

Exercice 1

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . On note $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ l'application définie par $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$. A quelle condition sur A et B , cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles finis non vides, p un entier naturel non nul et une application $f : E \rightarrow F$ telle que $\forall y \in F, \text{Card}(f^{-1}(\{y\})) = p$. Montrer que $\text{Card } E = p \times \text{Card } F$.

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(a, 1, -1)$, $B(-1, a, 1)$, et $C(1, -1, a)$ où a est un réel.

- 1) Existe-t-il une ou plusieurs valeurs de a telle(s) que A , B et C soient alignés ? Si oui, la ou les donner.
- 2) Calculer $\det(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})$ sous forme factorisée.
- 3) Existe-t-il une ou plusieurs valeurs de a telle(s) que O , A , B et C soient coplanaires ? Si oui, la ou les donner.
- 4) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 5) Déterminer un système d'équations cartésiennes de Δ , la perpendiculaire à (ABC) en O .
- 6) Montrer que Δ et (AB) ne sont pas coplanaires puis déterminer un système d'équations paramétriques de Δ' , la perpendiculaire commune à Δ et (AB) .
- 7) Donner une équation cartésienne du plan P contenant Δ et tel que (BC) soit parallèle à P .
- 8) Déterminer l'intersection de Δ' et P .
- 9) On suppose a non nul. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$ et déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que le tétraèdre $MABC$ ait le même volume que $OABC$.
- 10) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) \wedge \overline{MA} = \vec{0}$.

Exercice 4

On considère l'espace \mathcal{E} , rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et muni de la relation \ll telle que $\forall (M, M') \in \mathcal{E}^2$, avec $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$M \ll M' \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \text{ ou } (x = x', y = y' \text{ et } z \leq z').$$

On admet que la relation \ll est une relation d'ordre total sur \mathcal{E} (c'est l'ordre lexicographique).

Par ailleurs, pour β réel fixé, on considère l'équation différentielle :

$$(E_\beta) : y'' - 2iy' + (\beta - 1)y = e^{it}.$$

- 1) Résoudre l'équation (E_β) . On considérera trois cas : $\beta > 0$ (on posera alors $\beta = b^2$), $\beta = 0$ et $\beta < 0$ (on posera alors $\beta = -b^2$).
- 2) Soit $(\beta, k, k') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$. Montrer qu'il existe une unique fonction f telle que $t \mapsto e^{it}f(t)$ est solution de (E_β) avec $f(0) = k$ et $f'(0) = k'$, puis que cette fonction f est à valeurs dans \mathbb{R} si et seulement si k et k' sont réels.

Dans la suite, pour $\beta \in \mathbb{R}$, on note \mathcal{F}_β l'ensemble des fonctions f à valeurs dans \mathbb{R} telles que $t \mapsto e^{it}f(t)$ est solution de (E_β) et on pose $\mathcal{F}^- = \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}_-^*} \mathcal{F}_\beta$, $\mathcal{F}^+ = \bigcup_{\beta \in \mathbb{R}_+^*} \mathcal{F}_\beta$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^- \cup \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}^+$.

On définit alors l'application $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ qui à tout point M de \mathcal{E} , de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, associe l'unique fonction f de \mathcal{F}_x telle que $f(0) = y$ et $f'(0) = z$.

- 3) Justifier que Φ est surjective.
- 4) Montrer que \mathcal{F}^- , \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}^+ sont deux à deux disjoints.
- 5) Prouver alors que Φ est bijective.
- 6) On définit la relation \triangleleft sur \mathcal{F} par $\forall (f, g) \in \mathcal{F}^2$:

$$f \triangleleft g \Leftrightarrow \Phi^{-1}(f) \ll \Phi^{-1}(g).$$

Démontrer que \triangleleft est une relation d'ordre total sur \mathcal{F} .

- 7) Soit S la sphère de centre O et de rayon 1. Montrer que S admet un maximum pour \ll .
- 8) Prouver que $\Phi(S)$ admet alors un maximum pour la relation \triangleleft et déterminer ce maximum.