TD du Chapitre 11 - Nombres réels

Exercice 1

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Prouver que :

a. Si $\forall\varepsilon>0$, on a $|a|<\varepsilon$ alors $a=0$.

b. Si $\forall\varepsilon>0$, on a $a<b+\varepsilon$ alors $a\le b$.

Attention : On demande des raisonnements rigoureux et pas de répondre « on fait tendre ε vers 0 ».

Exercice 2

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1) On suppose que $\forall (a,b)\in A\times B$, $a\le b$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A\le\inf B$.

A partir de maintenant, on suppose A et B bornées.

2) Montrer que si $A\subset B$, alors $\inf A\ge\inf B$ et $\sup A\le\sup B$.

3) On suppose que $A\cap B\ne\varnothing$. Montrer que :
   a. $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$ et $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$.
   b. $\sup(A\cap B)\le\min\{\sup A,\sup B\}$ et $\inf(A\cap B)\ge\max\{\inf A,\inf B\}$.

4) On pose $A+B=\{a+b,\,(a,b)\in A\times B\}$. Montrer que :

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B \text{ et } \inf(A+B)=\inf A+\inf B.$$

5) Donner sans les prouver (enfin, n'hésitez pas à le faire si vous voulez !) des égalités similaires à celles de la question précédente pour :
   a. $A-B=\{a-b,\,(a,b)\in A\times B\}$;
   b. $AB=\{ab,\,(a,b)\in A\times B\}$ avec $A\subset\mathbb{R}_+$ et $B\subset\mathbb{R}_+$;
   c. $AB=\{ab,\,(a,b)\in A\times B\}$ avec $A\subset\mathbb{R}_-$ et $B\subset\mathbb{R}_+$;
   d. $AB=\{ab,\,(a,b)\in A\times B\}$ avec $A\subset\mathbb{R}_-$ et $B\subset\mathbb{R}_-$.

Exercice 3

Déterminer, quand elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants :

1) $A=\left\{\dfrac{1}{n}+(-1)^n \setminus n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

2) $B=\left\{\dfrac{(-1)^n+1}{n}+n^2 \setminus n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

3) $C=\left\{E(x)+E\left(\dfrac{1}{x}\right) \setminus x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$.

4) $D=\left\{\dfrac{p-q}{p+q+1} \setminus (p,q)\in\mathbb{N}^2\right\}$.

5) $E=\left\{1-\dfrac{1}{n-m} \setminus (n,m)\in\mathbb{N}^2,\, n\ne m\right\}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\big||x+2|-|2x-1|\big|=\big||x+1|-|2x-2|\big|$.

Exercice 5

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

a. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.

b. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x-1|)(1 + |y-1|)$.

Exercice 6

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer que $I \cup J$ est un intervalle dès que $I \cap J \neq \varnothing$. Cette condition est-elle nécessaire ?

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Etablir les relations suivantes :

1) $E(x+n) = E(x) + n$.
2) $1 - k \leq kE(nx) - nE(kx) \leq n - 1$ pour $k \in \mathbb{N}$.
3) $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.
4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(\frac{x+k}{n}\right) = E(x)$.
5) $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.

Exercice 8

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Montrer que $\mathrm{Card}\big([a, b] \cap \mathbb{Z}\big) = E(b) + E(1-a)$.

Exercice 9

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2})$.

Exercice 10

Prouver que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ n'est pas rationnel. Déterminer une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Exercice 11

Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

☺ *Si* f *est un tel morphisme, on pourra noter* $f(1) = a$ *et évaluer* f *sur* $\mathbb{N}$, *puis* $\mathbb{Z}$, *puis* $\mathbb{Q}$ *et enfin* $\mathbb{R}$.