

TD du Chapitre 12 – Suites numériques

Exercice 1

Dans les trois cas suivants, exprimer u_n en fonction de n (on justifiera que la suite est bien définie) et déterminer la limite de u :

a) $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt[n]{n + (u_n)^{n-1}}$.

b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} + e^{-n})$.

c) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$. ☺ Poser $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ (en justifiant a posteriori que cela est possible).

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{3n} = 4(u_n - 1)$. Montrer que u est constante et donner cette constante.

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^n \ln x$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = 1$ admet une unique solution réelle que l'on appellera x_n .

b) Etudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (variations, limite).

Exercice 4

Etudier les suites suivantes (en cas de convergence, on ne cherchera pas à déterminer les limites) :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On montrera que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)$. ☺ Introduire la fonction f définie par $f(x) = \ln 2 + x \ln \left(\frac{x}{x+1}\right) + \ln \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$.

Exercice 5

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par ses $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n}.$$

Montrer que u et v divergent vers $+\infty$.

Exercice 6

Soient α et un réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin(n\alpha)$.

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2(\cos \alpha)u_{n+1} - u_n$ et en déduire que si u converge alors sa limite est nulle ou bien $\cos \alpha = 1$.
- 2) Etudier u dans le cas où $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$.
- 3) Pour $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, montrer que u ne converge pas.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

- a) Montrer que si $0 \leq \ell < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et si $\ell > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- b) Justifier que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exercice 8

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels compris entre 0 et 1 telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

- 1) Montrer que si u converge alors v converge la même limite.
- 2) Prouver que la réciproque est fautive.
- 3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Prouver que la réciproque est fautive.

- 4) On suppose maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et on pose $v_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n u_k}$. Montrer que si u converge alors v converge la même limite.

Exercice 10

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante et $v = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de u .

- a) Montrer que si v converge, alors u converge vers la même limite.
- b) Montrer que si v diverge vers $+\infty$, alors u aussi.

Exercice 11

On veut montrer que *de toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente*. Cette propriété s'appelle le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq n, u_k \leq u_n\}$.

- 1) On suppose dans cette question que A n'est pas majorée et on pose $\varphi(0) = \min A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) = \min [A \cap \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq \varphi(n) + 1\}]$.
 - a. Montrer que φ est bien définie sur \mathbb{N} , à valeurs dans \mathbb{N} , strictement croissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$.
 - b. Montrer alors que $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et conclure.
- 2) On suppose maintenant que A est vide ou majorée.
 - a. Justifier l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, n \notin A$.
 - b. Montrer alors que l'on peut extraire de u une sous-suite croissante et conclure.

Exercice 12

Donner la forme du terme général d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+1} + u_{n+2} = n$.

Exercice 13

Dans la respectable banlieue d'Agrestic, Nancy Botwin a du mal à joindre les deux bouts depuis le décès de son mari. En effet, elle doit rembourser l'emprunt de sa maison (1000 \$ par mois) et faire vivre ses deux enfants, bientôt rejoints par son beau-frère. Sa pension de 2550 \$ par mois ne suffit pas à subvenir aux besoins de sa famille.

Un jour, elle a calculé que ses dépenses mensuelles se montent à 2500 \$ mais, avec l'inflation, elles augmentent de 0,4 % par mois. Ce jour-là, elle décide de se lancer dans le commerce de plantes... A la fin du mois, elle a réalisé un bénéfice de 1000 \$. Ses ventes suivant aussi les lois de l'inflation, son bénéfice augmente comme ses dépenses de 0,4 % par mois.

Nancy se rend compte qu'à ce train, son bilan mensuel, initialement bénéficiaire, sera déficitaire dans un certain nombre de mois. Cependant, si elle met de côté les bénéfices des premiers mois, elle pourra les utiliser petit à petit pour compléter son revenu et payer ses factures mensuelles. Remarquons que la malheureuse Nancy n'a initialement aucune économie.

Elle se demande alors si cette méthode lui évitera un déficit et sinon, au bout de combien de mois elle sera à nouveau déficitaire, cette fois-ci sans économies. Elle devra alors augmenter le bénéfice de ses ventes de plantes en les faisant pousser elle-même au lieu de les acheter à son fournisseur habituel.

Pouvez-vous aider Nancy à résoudre ces casse-têtes financiers en répondant aux questions suivantes :

- Au bout de combien de mois, Nancy sera-t-elle déficitaire en économisant ses bénéfices ?
- Au bout de combien de mois, Nancy sera-t-elle déficitaire en utilisant ses économies ?
- A ce moment précis, à combien devra se monter au minimum le nouveau bénéfice de ses ventes (toujours indexé à l'inflation) pour n'être plus jamais déficitaire ?

Exercice 14

On pose $u_n = \sum_{k=1}^n k^5$. Montrer que $u_n = o(n^7)$ et $u_n = O(n^6)$.

Exercice 15

Déterminer un équivalent simple de :

a) $u_n = \ln(1+n) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) $u_n = \frac{\sqrt{4n+1} - 2\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)^3} - n\sqrt{n}}$

c) $u_n = \frac{1+a^n + n^\alpha}{(\ln n)^\beta + n^\alpha}$ suivant les valeurs des réels a , α et β avec $a > 0$.

Exercice 16

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left[\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \right]^2$.

a) Pour $a > 0$ fixé, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (n+a)u_n$. Etudier le sens de variation de la suite (v_n) .

b) Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$.

Exercice 17

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n + c_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n}) = 3.$$

a) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

b) Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, alors c'est vers la même limite.

c) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

On admettra le résultat suivant : « Si toutes les suites extraites convergentes d'une suite bornée u admettent la même limite alors la suite u converge ».

