

Chapitre 13 – Algèbre Linéaire

Dans tout le chapitre \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I – Espaces vectoriels

1. Généralités

a. Définition :

Définition :

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe sur \mathbb{K} , \times .

On dit que $(E, +, \times)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel si :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif.
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \times x \in E$.
- $\forall x \in E, 1 \times x = x$.
- $\forall x \in E$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \times (\mu \times x) = (\lambda\mu) \times x$ et $(\lambda + \mu) \times x = \lambda \times x + \mu \times x$
- $\forall (x, x') \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \times (x + x') = \lambda \times x + \lambda \times x'$.

Un élément d'un espace vectoriel est appelé vecteur et un élément de \mathbb{K} est appelé scalaire.

Si, de plus, E est muni d'un produit interne qui, avec l'addition, lui confère une structure d'anneau, on dit que E est une algèbre.

Si $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, une combinaison linéaire des x_i est une expression de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

Dans toute la suite, sauf cas contraire, on se place dans E , un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriétés :

- $\forall x \in E, 0x = 0_E$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda 0_E = 0_E$.
- $\lambda x = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E$ ou $\lambda = 0$.
- $\forall x \in E, (-1)x = -x$ (le symétrique de x pour $+$).

b. Espaces produit, espaces d'applications :

Propriétés et définition :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- $E \times F$, muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles est un \mathbb{K} -espace vectoriel appelé espace produit.
- Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E , muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Conséquences :

- $\forall p \in \mathbb{N}^*$, si E_1, E_2, \dots, E_p sont des e.v. alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est un e.v. (en particulier E^p, \mathbb{K}^n).
- $E^{\mathbb{N}}, E^{\mathbb{R}}$ sont des e.v.

2. Sous-espaces vectoriels

a. Définition et caractérisation :

Définition :

Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide de E qui, munie des restrictions des lois de E , est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété :

Soit F une partie non vide de E .
 F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\forall (x, x') \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x + \mu x' \in F$.

b. Intersection de sous-espaces vectoriels :

Propriété :

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

c. Sous-espace vectoriel engendré par une partie :

Définition :

Soit A une partie de E . On appelle sous-espace engendré par A , noté $\text{Vect}(A)$, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A .

Si $x_1 \neq 0$, $\text{Vect}(x_1)$ est une droite vectorielle, aussi notée $\mathbb{K}x_1$.

Si x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires, $\text{Vect}(x_1, x_2)$ est un plan vectoriel.

Propriété :

Si $A \subset E$ est finie, alors $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A .

Propriété :

Soit (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille de E alors :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{Vect}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_p x_p)$.
- $\forall (\lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, \dots, x_p + \lambda_p x_1)$.
- $\forall (\alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{Vect}(x_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i x_i, x_2, \dots, x_p)$.

d. Somme de sous-espaces vectoriels :

Propriété et définition :

Soient F et G deux s.e.v. de E , l'ensemble $\{x \in E \mid x = x_F + x_G, (x_F, x_G) \in F \times G\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et G , noté $F + G$.

De plus, si $F \cap G = \{0\}$, on dit que la somme est directe et on note $F \oplus G$.

Propriété :

Soient F et G deux sous-espaces de E . On a $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$.

Propriété :

Soient F et G deux sous-espaces de E .

$F \cap G = \{0\}$ si et seulement si $\forall x \in F + G$, $\exists! (x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

e. Sous-espaces supplémentaires :Définitions :

Soient F et G deux s.e.v. de E . On dit que F et G sont supplémentaires si $F \oplus G = E$.

On dit aussi que G est un supplémentaire de F dans E .

Soit F un s.e.v. de E . On dit que F est un hyperplan s'il admet une droite vectorielle pour supplémentaire.

3. Famille libre, famille liéeDéfinition :

Soit (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille finie de vecteurs de E .

On dit que la famille est libre si $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E . On dit que la famille est libre si toute sous-famille finie de $(x_i)_{i \in I}$ est libre. Dans le cas contraire, on dit que la famille (finie ou non) est liée.

Si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre, on dit que les vecteurs sont linéairement indépendants.

Si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée, on dit que les vecteurs sont liés.

Si deux vecteurs forment une famille liée, on dit qu'ils sont colinéaires.

Propriétés :

- Toute famille extraite d'une famille libre est libre.
- Si F est une famille liée, alors toute famille contenant F est liée.

4. Famille génératriceDéfinition :

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

On dit que cette famille est génératrice de E si $E = \text{Vect}(\{x_i, i \in I\})$.

Propriété :

Soit (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille génératrice de E alors :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_p x_p)$ est génératrice.
- $\forall (\lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, \dots, x_p + \lambda_p x_1)$ est génératrice.
- $\forall (\alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $(x_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i x_i, x_2, \dots, x_p)$ est génératrice.

Propriété :

Si F est une famille génératrice de E , alors toute famille contenant F est génératrice.

II – Sous-espaces affines**1. Définition**Définition :

Soit A élément d'un espace vectoriel \vec{E} . Un sous-espace affine de \vec{E} est une partie \mathcal{F} de \vec{E} de la forme $\mathcal{F} = A + \vec{F}$ où \vec{F} est un sous-espace vectoriel de E . Le sous-espace vectoriel \vec{F} est appelé direction de \mathcal{F} .

Si $M \in \mathcal{F}$, on dit que \mathcal{F} passse par M .

Si \vec{F} est une droite vectorielle (*resp.* un plan vectoriel), on dit que \mathcal{F} est une droite affine (*resp.* un plan affine).

Propriété : Relation de Chasles.

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \vec{E} . $\forall (A, B, C) \in \mathcal{F}^3$, on a $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Corollaires :

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \vec{E} de direction \vec{F} .

- $\forall M \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = M + \vec{F}$.
- $\forall (A, B) \in \mathcal{F}^2$, $A = B \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{0}$ et $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

2. Translations

Définition :

Soit \mathcal{E} un espace affine de direction \vec{E} et $\vec{u} \in \vec{E}$ fixé.

L'application $t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}; M \mapsto M + \vec{u}$ est la translation de vecteur \vec{u} .

Propriétés :

- $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$, $t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.
- Toute translation $t_{\vec{u}}$ est bijective de bijection réciproque $t_{-\vec{u}}$.
- L'image d'un sous-espace affine par une translation est un sous-espace affine de même direction.

3. Inclusion, intersection

Propriété :

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \vec{E} , de directions respectives \vec{F} et \vec{G} .

- Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ alors $\vec{F} \subset \vec{G}$.
- Si $\vec{F} \subset \vec{G}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Propriété :

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \vec{E} , de directions respectives \vec{F} et \vec{G} .

Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $\vec{F} \cap \vec{G}$.

4. Parallélisme

Définition :

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \vec{E} , de directions respectives \vec{F} et \vec{G} .

- On dit que \mathcal{F} est parallèle à \mathcal{G} si $\vec{F} \subset \vec{G}$.
- On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles si $\vec{F} = \vec{G}$.

Propriété :

Si \mathcal{F} est parallèle à \mathcal{G} , alors soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Propriété :

Deux sous-espaces affines sont parallèles ssi ils sont images l'un de l'autre par une translation.

III – Applications linéaires

1. Définitions

Dans ce qui suit, on considère E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Définitions :

Une application $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, si $\forall (x, x') \in E^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x').$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Si, de plus, f est bijective, f est un isomorphisme.

Si $E = F$, f est un endomorphisme. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Si $E = F$ et f est bijective, f est un automorphisme. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

Si $F = \mathbb{K}$, f est une forme linéaire.

S'il existe un isomorphisme entre deux espaces vectoriels E et F , on dit que E et F sont isomorphes.

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $f(0_E) = 0_F$.
- L'image d'une combinaison linéaire par une application linéaire est la même combinaison linéaire des images, soit $\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ et $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_p f(x_p).$$

2. Applications linéaires et opérations

Propriété :

$\mathcal{L}(E, F)$ muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles, est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriétés :

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Propriété :

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Propriété et définition :

$GL(E)$ muni de la loi \circ est un groupe, appelé groupe linéaire de E .

3. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si G est un sous-espace de E , alors $f(G)$ est un sous-espace de F .
- Si H est un sous-espace de F , alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace de E .

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace F de E est stable par f si $f(F) \subset F$.

4. Image et noyau

a. Définition :

Définitions :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le noyau de f , noté $\ker f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f , soit :

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

- L'image de f , notée $\text{Im } f$, est $f(E)$, soit :

$$\text{Im } f = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}$$

b. Propriétés :

Propriété :

$\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\ker \lambda f = \ker f$ et $\text{Im } \lambda f = \text{Im } f$.

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.
- f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$.

Propriété :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, une famille de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- u est injective \Leftrightarrow l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F .
- u est surjective \Leftrightarrow l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F .

c. Equations linéaires :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Une équation linéaire est une équation de la forme $u(x) = 0$ d'inconnue x (vecteur). L'ensemble des solutions est bien entendu $\ker u$.

Si maintenant b est un vecteur fixé de F , l'équation $u(x) = b$ admet des solutions si et seulement si $b \in \text{Im } u$ et dans ce cas, l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker u$.

5. Applications linéaires particulières

a. Projecteurs :

Propriété et définition :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E .

Tout élément x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

L'application $p : E \rightarrow E ; x \mapsto x_F$ est linéaire et s'appelle projecteur ou projection sur F parallèlement à G .

Propriété :

Soit p une projection sur F parallèlement à G . Alors :

- $\ker p = G$ et $\text{Im } p = F$.
- $x \in \text{Im } p \Leftrightarrow p(x) = x$.

Propriété :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

Propriété et définition :

Si p est une projection de E , alors $\text{Id} - p$ est la projection sur $\ker p$ parallèlement à $\text{Im } p$.

On dit que p et $\text{Id} - p$ sont des projecteurs associés.

b. Symétries :Propriété et définition :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E .

Tout élément x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.

L'application $s : E \rightarrow E ; x \mapsto x_F - x_G$ est linéaire et s'appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Propriété :

Soit s une symétrie par rapport F parallèlement à G . Alors :

- $x \in F \Leftrightarrow s(x) = x$ et $F = \ker(s - \text{Id})$.
- $x \in G \Leftrightarrow s(x) = -x$ et $G = \ker(s + \text{Id})$.

Propriété :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \text{Id}$.

c. Homothéties, affinités :Définition :

Une homothétie de rapport λ est un endomorphisme de E de la forme λId avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Propriété et définition :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Tout élément x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$. L'application $a : E \rightarrow E ; x \mapsto x_F + \lambda x_G$ est linéaire et s'appelle affinité de base F , de direction G et de rapport λ .

IV – Dimension des espaces vectoriels**1. Bases**Définition :

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que cette famille est base de E si elle est libre et génératrice.

Propriété et définition :

Soit E un espace vectoriel possédant une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Tout vecteur x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ avec $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

Les x_i sont appelés coordonnées ou composantes de x dans la base \mathcal{B} .

2. Dimension d'un espace vectoriel

Définition :

Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème : de l'échange

Soient $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille libre et $\mathcal{G} = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ une famille génératrice de E .
On a $n \leq p$ et il existe n vecteur de \mathcal{G} , qui échangés par ceux de \mathcal{F} forment une nouvelle famille génératrice.

Théorème et définition :

Tout espace vectoriel E de dimension finie et différent de $\{0\}$ possède des bases et toutes les bases ont le même cardinal. Ce cardinal s'appelle la dimension de E , noté $\dim E$.

Propriété :

Etant donnée une famille F de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :

- Si F est libre, alors $p \leq n$, avec égalité si et seulement si F est une base.
- Si F est génératrice, alors $p \geq n$, avec égalité si et seulement si F est une base.

Corollaire :

Etant donnée une famille F de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :

$$F \text{ est une base} \Leftrightarrow F \text{ est libre} \Leftrightarrow F \text{ est génératrice.}$$

3. Applications linéaires et dimensions finies

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . La donnée des $u(e_i)$ pour i entre 1 et n définit parfaitement u et réciproquement, si (f_1, f_2, \dots, f_n) est une famille de n vecteurs de F , alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i$.

4. Dimension finie et isomorphismes

Propriété :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F .

Corollaires :

- Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n .
- Deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

5. Espace produit

Propriété :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.
 $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$. De plus, si (e_1, e_2, \dots, e_n) et (f_1, f_2, \dots, f_p) sont des bases de E et F alors $((e_1, 0_F), (e_2, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), (0_E, f_2), \dots, (0_E, f_p))$ est une base de $E \times F$.

Conséquence : Si E_1, E_2, \dots, E_p sont p espaces de dimensions finies, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie égale à $\dim E_1 + \dim E_2 + \dots + \dim E_p$. En particulier, E^p est de dimension finie $p \times \dim E$.

6. Espace $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété :

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.
 $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

7. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

a. Dimension d'un sous-espace vectoriel :

Théorème :

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

b. Rang d'une famille de vecteurs :

Définition :

Soit F une famille finie de vecteurs de E . Le rang de F , noté $\text{rg}(F)$, est la dimension de $\text{Vect}(F)$.

Propriété :

Soit (x_1, x_2, \dots, x_p) une famille de E alors :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p, \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{rg}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_p x_p)$.
- $\forall (\lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}, \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{rg}(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, \dots, x_p + \lambda_p x_1)$.
- $\forall (\alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}, \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{rg}(x_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i x_i, x_2, \dots, x_p)$.

c. Théorème de la base incomplète :

Théorème : de la base incomplète.

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base de E .

Corollaire :

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire.

d. Dimension de la somme :

Propriété :

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.

- Si $F \cap G = \{0\}$, on a $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.
- Pour F et G quelconques, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$ (c'est la *formule de Grassmann*).

Corollaire :

Soit H un sev de E . H est un hyperplan ssi $\dim H = \dim E - 1$.

8. Dimension d'un sous-espace affine

Définition :

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \vec{E} de direction \vec{F} . \mathcal{F} est de dimension finie si \vec{F} l'est est dans ce cas, la dimension de \mathcal{F} est celle de \vec{F} .

V – Applications linéaires en dimension finie

1. Rang d'une application linéaire

Dans cette partie, on considère E et F deux espaces vectoriels.

a. Définition :

Propriété et définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E ou F est de dimension finie, alors $\text{Im } u$ est de dimension finie et la dimension de $\text{Im } u$ est appelée rang de u , noté $\text{rg}(u)$.

De plus, si E est de dimension finie n , alors $\text{rg}(u) \leq n$ et si F est de dimension finie p , alors $\text{rg}(u) \leq p$.

b. Théorème du rang :

Lemme :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie et G un supplémentaire de $\ker u$ dans E . La restriction de u à G définit un isomorphisme dans $\text{Im } u$.

Théorème : du rang.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$\dim(\ker u) + \text{rg}(u) = \dim E.$$

Corollaire 1 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont de dimensions finies n et p respectivement. On a alors :

- u est injective si et seulement si $\text{rg}(u) = n$.
- u est surjective si et seulement si $\text{rg}(u) = p$.

Corollaire 2 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E et F sont de même dimension, alors :

$$u \text{ bijective} \Leftrightarrow u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective.}$$

Corollaire 3 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est un automorphisme si et seulement si $\text{rg}(u) = n$ où n est la dimension de E .

Corollaire 4 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ où E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimensions finies.

- Si u est un isomorphisme, alors $\text{Im}(v \circ u) = \text{Im } v$ et $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$.
- Si v est un isomorphisme, alors $\ker(v \circ u) = \ker u$ et $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$.

2. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Propriété et définition :

Soit H un sous-espace de E .

H est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Alors, l'équation $\varphi(x) = 0$ est une équation cartésienne de H .