Chapitre 14 – Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

I – Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

1. Définitions

Définition :

Une fonction à valeurs réelles est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques :

- Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire, on considèrera des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et, dans cette partie, à valeurs réelles. On travaille donc dans $\mathbb{R}^I$.
- La plupart des définitions et propriétés perdurent si la fonction est définie sur une partie quelconque de $\mathbb{R}$.
- On notera $a \in \bar{I}$, si a appartient à I ou est une extrémité de I (éventuellement infinie).

Définition :

On dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a avec $a \in \bar{I}$ si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert J, centré en a si $a \in \mathbb{R}$ ou de la forme $]c;+\infty[$ si $a = +\infty$ ou $]-\infty;c[$ si $a = -\infty$.

Exemple : $x \mapsto 1/x$ est définie au voisinage de 0.

Définition :

Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative ou représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ quand x décrit I.

2. Opérations

On définit les opérations suivantes sur $\mathbb{R}^I$: $\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$:

- *Somme* : $f+g$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto f(x)+g(x)$.
- *Produit* : $f \times g$ (ou fg) est la fonction définie sur I, $x \mapsto f(x)g(x)$.
- *Produit par un nombre* : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est la fonction définie sur I, $x \mapsto \lambda f(x)$.
- *Inverse* : Si $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, $1/f$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto 1/f(x)$.
- *Quotient* : Si $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, g/f est la fonction définie sur I, $x \mapsto g(x)/f(x)$.
- *Composée* : Si $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in \mathbb{R}^J$ et $f(I) \subset J$, la composée $g \circ f$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto g(f(x))$.
- *Valeur absolue* : $|f|$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto |f(x)|$.

Les deux premières sont internes, la troisième est externe.

Propriétés :

$(\mathbb{R}^I, +, \times)$ est un anneau commutatif non intègre et $(\mathbb{R}^I, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque : Tout compris, on dit que $(\mathbb{R}^I, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Preuve : Evident du fait que $\mathbb{R}$ est un corps.

3. Relation d'ordre

Propriété et définition :

On définit aussi sur $\mathbb{R}^I$ la relation suivante : $\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$, $f \leq g$ ssi $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.
Cette relation définie ci-dessus est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{R}^I$.

Preuve : Résulte immédiatement de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. A faire !

Définition :

Soit $\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$. On peut définit les deux fonctions $\underline{\sup(f,g)}$ et $\underline{\inf(f,g)}$ par :

$$\inf(f,g) : x \mapsto \min\big(f(x), g(x)\big) \text{ et } \sup(f,g) : x \mapsto \max\big(f(x), g(x)\big).$$

Remarque : Il est alors clair que $\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$, $\inf(f,g) \leq f \leq \sup(f,g)$ et $\inf(f,g) \leq g \leq \sup(f,g)$.

Propriété :

$\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$:

$$\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \text{ et } \inf(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Preuve :

On a vu dans le chapitre sur les réels que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2} \text{ et } \max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$$

Le résultat en découle immédiatement.

4. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.
On dit que f est majorée (*resp.* minorée) s'il existe un réel μ tel que $\forall x \in I$, $f(x) \leq \mu$ (*resp.* $f(x) \geq \mu$).
On dit que μ est un majorant (*resp.* minorant) de f ou encore que f est majorée (*resp.* minorée) par μ.
On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarques :

- On note souvent $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées sur I.
- Une fonction f est bornée sur s'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f(x)| \leq M$.

Propriété :

$\big(\mathcal{B}(I,\mathbb{R}), +, \times, .\big)$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{R}^I, +, \times, .)$ (sous-espace vectoriel et sous-anneau).

Preuve :

- Les fonctions nulle et unité (0_I et 1_I) sont bornées donc dans $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$.
- $\forall (f,g) \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})^2$, $\exists M \geq 0$ et $\exists M' \geq 0$ tels que $\forall x \in I$, $|f(x)| \leq M$ et $|g(x)| \leq M'$. Alors :

- $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall x\in I$, $|\lambda f(x)+\mu g(x)|\leq|\lambda||f(x)|+|\mu||g(x)|\leq|\lambda|M+|\mu|M'$.
  Donc $\lambda f+\mu g\in\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ et $(\mathcal{B}(I,\mathbb{R}),+,.)$ est un sev de $(\mathbb{R}^I,+,.)$.
- $\forall x\in I$, $|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|\leq MM'$ donc $fg\in\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est stable par $\times$.
  Comme $(\mathcal{B}(I,\mathbb{R}),+)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^I,+)$ (car sev), $(\mathcal{B}(I,\mathbb{R}),+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}^I,+,\times)$.

Remarque :
Comme I est non vide, f(I) est non vide donc si f est majorée (*resp*. minorée), f(I) est une partie non vide et majorée (*resp*. minorée) de $\mathbb{R}$ donc elle possède une borne supérieure (*resp*. inférieure). D'où les définitions :

Définitions :

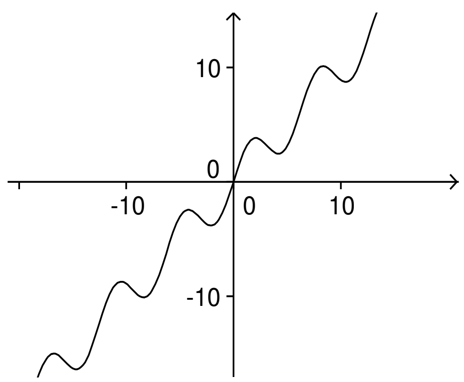
Soit $f\in\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$. La borne supérieure (*resp*. inférieure) de f est la borne supérieure (*resp*. inférieure) de f(I). Elle est notée $\sup_I f$ ou $\sup_{x\in I} f(x)$ (*resp*. $\inf_I f$ ou $\inf_{x\in I} f(x)$).

5. Extremum

Définitions :

Soit $f\in\mathbb{R}^I$ et $a\in I$. On dit que :
- f(a) est le maximum (*resp*. minimum) global de f si $\forall x\in I$, $f(x)\leq f(a)$ (*resp*. $f(x)\geq f(a)$).
- f(a) est le maximum (*resp*. minimum) local de f si $f(x)\leq f(a)$ (*resp*. $f(x)\geq f(a)$) au voisinage de a.
- Si f(a) est le maximum ou le minimum global (*resp*. local) de f, on dit que f(a) est un extremum global (*resp*. local) de f.
- Si f(a) est un extremum de f sur I, on dit qu'il est atteint en a.

Remarques :
- Si f admet un maximum (*resp*. minimum) global, il est unique, mais peut être atteint en plusieurs points de I. *Ex* : 1 et – 1 pour la fonction cosinus). On le note $\max_I f$ ou $\max_{x\in I} f(x)$ (*resp*. $\min_I f$ ou $\min_{x\in I} f(x)$).
- Si f admet un maximum (*resp*. minimum) global, elle est majorée (*resp*. minorée) sur I.
- Si f admet un maximum global et un minimum global, elle est bornée sur I.
- Par contre, f peut présenter une infinité d'extremums locaux (sans être bornée).
  Ex : $x\mapsto x+2\sin x$ de courbe :



6. Monotonie

Définitions :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

f est croissante (*resp.* décroissante) sur I si $\forall (x,x') \in I^2,\ x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ (*resp.* $f(x') \leq f(x)$).

f est strictement croissante (*resp.* strictement décroissante) sur I si $\forall (x,x') \in I^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ (*resp.* $f(x') < f(x)$).

f est (strictement) monotone sur I si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur I.

Propriétés (immédiates) :

- Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}^I$ (strictement) monotones sur I de même sens de variation, alors :
  - ► $f+g$ est (strictement) monotone sur I et de même sens de variation que f et g.
  - ► Si f et g sont *positives* sur I alors fg est (strictement) monotone sur I, de même sens de variation que f et g.
- Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ avec $f(I) \subset J$.
  - ► Si f et g sont (strictement) monotones de même sens, $g \circ f$ est (strictement) croissante.
  - ► Si f et g sont (strictement) monotones de sens contraires, $g \circ f$ est (strictement) décroissante.

7. Parité – Imparité

Définitions :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

On dit que f est paire (*resp.* impaire) si I est centré en 0 et $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$ (*resp.* $f(-x) = -f(x)$).

Remarque :

- Ne pas oublier I est centré en 0 (ou D_f symétrique par rapport à 0, si D_f n'est pas un intervalle). Il faut justifier cela avant de comparer $f(-x)$ et $f(x)$ (car si pour $x \in I$, $-x \notin I$, $f(-x)$ n'est pas défini !)
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire (*resp.* impaire) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (*resp.* à l'origine).
- Dans ce cours, on notera $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les ensembles des fonctions respectivement paires et impaires sur I. On vu dans le chapitre d'algèbre linéaire que :

Propriété :

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^I$.

Remarque : Attention avec la produit…

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^I$.

- Si f et g sont paires, alors fg est paire et si $f \circ g$ est définie, elle est paire.
- Si f et g sont impaires, alors fg est paire et si $f \circ g$ est définie, elle est impaire.
- Si f est paire et g impaire (ou vice-versa), alors fg est impaire et si $f \circ g$ est définie, elle est impaire.

Preuve : Simple, à faire !