Chapitre 14 – Fonctions Numériques : Quelques Preuves

Image continue d'un intervalle

Théorème :

> Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Preuve :

Soit f continue sur un intervalle I. On veut prouver que :

$$f(I) \text{ est un intervalle} \Leftrightarrow f(I) \text{ est une partie convexe de } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall (y_1,y_2)\in f(I)^2 \text{ tel que } y_1 < y_2, \text{ on a } [y_1;y_2]\subset f(I).$$

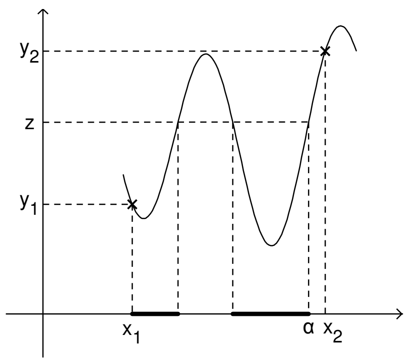
Soit $(y_1,y_2)\in f(I)^2$ tel que $y_1 < y_2$. Il existe $(x_1,x_2)\in I^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ donc c'est un convexe de $\mathbb{R}$ et $(x_1,x_2)\in I^2 \Rightarrow [x_1;x_2]\subset I$ ou $[x_2;x_1]\subset I$.

Soit $z\in[y_1;y_2]$. Si $z = y_1$ ou $z = y_2$, alors $z\in f(I)$.

On suppose maintenant que $y_1 < z < y_2$. On a $x_1 \neq x_2$ car $y_1 \neq y_2$. Considérons alors deux cas :

1^er cas : $x_1 < x_2$ tel que sur la figure ci-dessous :



Posons $A = \{x\in[x_1;x_2], f(x) < z\}$ (A *est surlignée en gras sur l'axe des abscisses de la figure).*

Comme $f(x_1) = y_1 < z$, on a $x_1 \in A$ donc A est non vide et comme $A\subset[x_1;x_2]$, A est bornée.

Ainsi, A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure α.

Comme $A\subset[x_1;x_2]$, on a $\alpha\in[x_1;x_2]\subset I$ donc $f(\alpha)$ a du sens.

Comme $\alpha = \sup A$, par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α. On a alors, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n \in A$ donc $f(\alpha_n) < z$ et par continuité de f, on obtient en passant à la limite : $\underline{f(\alpha)\leq z}$.

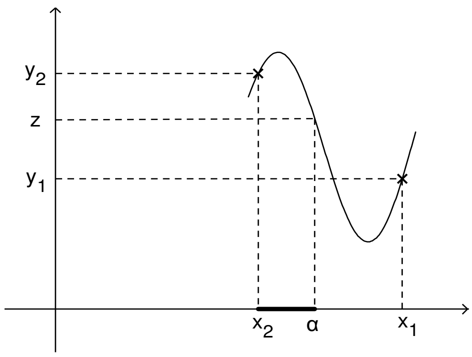
Par ailleurs, $f(x_2) = y_2 > z$ donc $\alpha < x_2$ et comme $\alpha = \sup A$, on a $\forall x\in\,]\alpha;x_2]$, $x\notin A$ donc $f(x)\geq z$.

En passant à la limite quand x tend vers α, on obtient à nouveau grâce à la continuité de f : $\underline{f(\alpha)\geq z}$.

Finalement, $f(\alpha) = z$ donc $z\in f(I)$ et ainsi :

$$[y_1;y_2]\subset f(I).$$

2nd cas : $x_1 > x_2$.



Posons $A = \{x \in [x_2\,;x_1], f(x) > z\}$. A est non vide (car $x_2 \in A$) et bornée donc elle admet une borne supérieure $\alpha \in [x_2\,;x_1] \subset I$.

Alors, il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_n) > z$ et par continuité de f, on obtient en passant à la limite : $\underline{f(\alpha) \geq z}$.

Par ailleurs, $\alpha < x_1$ et $\forall\, x \in]\alpha; x_2]$, $x \notin A$ donc $f(x) \leq z$, et, par continuité de f, on a : $\underline{f(\alpha) \leq z}$.

Finalement, $f(\alpha) = z$ donc $z \in f(I)$ et ainsi :

$$[y_1\,; y_2] \subset f(I).$$

Dans les deux cas, $[y_1\,; y_2] \subset f(I)$ donc f(I) est bien convexe, c'est un intervalle.

Image continue d'un segment

Théorème :

Si $f \in \mathcal{C}([a\,;b],\mathbb{R})$, alors $f\left([a\,;b]\right)$ est un segment. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Preuve :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$.

On veut montrer que $f\left([a\,;b]\right)$ est un segment, c'est-à-dire un intervalle borné et fermé.

- D'après le théorème précédent, $f\left([a\,;b]\right)$ est un intervalle car $[a\,;b]$ en est un.
- Montrons par l'absurde que $f\left([a\,;b]\right)$ est borné.
  Supposons que $f\left([a\,;b]\right)$ n'est pas majoré. Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in [a\,;b]$ tel que $f(x_n) \geq n$.
  Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.
  Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$ donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $c \in [a\,;b]$.
  Comme f est continue sur $[a\,;b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(c)$.
  Mais, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = +\infty$, ce qui est absurde car $f(c)$ est fini.
  Ainsi, $f\left([a\,;b]\right)$ est majoré. On prouve de même que $f\left([a\,;b]\right)$ est minoré et donc :

$$\underline{f\left([a\,;b]\right) \text{ est borné}}.$$

- Prouvons enfin que $f([a;b])$ est fermé

  D'après ce qui précède, $f([a;b])$ est un intervalle borné donc il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $]A;B[\subset f([a;b])\subset[A;B]$ avec $A=\inf f([a;b])$ et $B=\sup f([a;b])$.
  Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a;b]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=B$. Comme plus haut, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $c\in[a;b]$ et alors $B=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)})=f(c)$ donc $B\in f([a;b])$.

  On prouve de même que $A\in f([a;b])$ et ainsi :

  $$\underline{f([a;b]) \text{ est fermé}}.$$

Finalement :

$$\boxed{f([a;b]) \text{ est bien un segment.}}$$

Bijection continue

On note ici $I=|a;b|$ avec $|=]$ ou $[$, a fini ou $a=-\infty$ et b fini ou $b=+\infty$.

Propriété :

Si $f\in C(I,\mathbb{R})$ est strictement croissante (*resp.* décroissante) sur I, alors $A=\lim\limits_{a} f$ et $B=\lim\limits_{b} f$ existent (éventuellement infinies) et $f(I)=|A;B|$ (*resp.* $|B;A|$), ouvert en A si I est ouvert en a, fermé en A si I est fermé en a, ouvert en B si I est ouvert en b, fermé en B si I est fermé en b.

Preuve :

Quitte à changer f en – f, supposons que f est strictement croissante.

On a vu dans une propriété précédente que toute fonction croissante sur $I=|a;b|$ admet une limite (finie ou infinie) en a et b, donc on peut poser $A=\lim\limits_{a} f=\inf\limits_{I} f$ et $B=\lim\limits_{b} f=\sup\limits_{I} f$.

On a $\forall x\in I$, $A\le f(x)\le B$, soit $\underline{f(I)\subset[A;B]}$.

Alors, par définition des limites (finies ou infinies), $\forall z\in\,]A;B[$, il existe $(x_1,x_2)\in I^2$ tel que $A\le f(x_1)<z<f(x_2)\le B$ donc $z\in[f(x_1);f(x_2)]$.

Or, comme f est continue sur l'intervalle I, $f(I)$ est un intervalle, donc $f(I)$ est convexe et $[f(x_1);f(x_2)]\subset f(I)$. Alors, $z\in f(I)$ et ainsi, $\underline{]A;B[\subset f(I)}$ d'où :

$$\underline{]A;B[\subset f(I)\subset[A;B]}.$$

De plus :

- Si $a\in I$, alors par continuité de f, $A=\lim\limits_{a} f=f(a)$ donc $A\in f(I)$.
- Si $a\notin I$, supposons que $A\in f(I)$. Alors A est fini et $\exists x_o\in I$ tel que $a<x_o$ et $f(x_o)=A$.

  Du fait de la stricte croissance de f, on a $\forall x\in\,]a;x_o[\,\subset I$, $f(x)<f(x_o)=A$, ce qui est absurde car $]A;B[\subset f(I)$. Ainsi, $A\notin f(I)$.

Ces deux prouvent que : $a\in I \Leftrightarrow A\in f(I)$.

On montre de la même manière que $b\in I \Leftrightarrow B\in f(I)$ et finalement :

$\boxed{f(I)=|A;B| \text{ (\textit{resp.} } |B;A|\text{), ouvert en A si I est ouvert en a, fermé en A si I est fermé en a.}}$

Propriété :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ strictement monotone sur I et telle que $f(I)$ est un intervalle. Alors, f est une bijection continue de I dans $f(I)$.

Preuve :

La stricte monotonie implique immédiatement que $\forall (x, x') \in I^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ et donc que f est injective. De plus, f est surjective de I dans $f(I)$ (par définition de $f(I)$). Ainsi :

$$\boxed{\text{f est une bijection de I dans } f(I).}$$

Remarquons par ailleurs que si $f \in \mathbb{R}^I$ est strictement monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle, alors la fonction $-f$ est strictement monotone sur I (de sens de variation contraire à celui de f) et $J' = (-f)(I)$ est un intervalle. Alors, quitte à changer f en $-f$, on peur supposer que f est strictement croissante sur I.

Soit $x_o \in I$ avec $x_o \neq \inf I$ (le cas échéant). Montrons que f est continue à gauche en x_o.

Comme $x_o \neq \inf I$, il existe $\alpha_o > 0$ tel que $x_o - \alpha_o \in I$ et I est un intervalle donc $[x_o - \alpha_o ; x_o] \subset I$.

$\forall \varepsilon > 0$, on a alors :

- Soit $f(x_o) - \varepsilon \leq f(x_o - \alpha_o)$. On pose alors $\alpha = \alpha_o$.
- Soit $f(x_o - \alpha_o) < f(x_o) - \varepsilon < f(x_o)$.

  Alors, $f(x_o - \alpha_o) \in f(I)$ et $f(x_o) \in f(I)$, et comme $f(I)$ est un intervalle (donc une partie convexe), $f(x_o) - \varepsilon \in [f(x_o - \alpha_o) ; f(x_o)] \subset f(I)$. Ainsi, il existe $c \in [x_o - \alpha_o ; x_o] \subset I$ tel que $f(x_o) - \varepsilon = f(c)$. On pose alors $\alpha = x_o - c > 0$ (soit $c = x_o - \alpha$).

Dans les deux cas, la stricte croissance de f permet d'écrire que $\exists\, \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$:

$$x_o - \alpha < x < x_o \Rightarrow f(x_o) - \varepsilon \leq f(x_o - \alpha) < f(x) < f(x_o) \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon.$$

Ceci prouve que f est continue à gauche en x_o.

On montre de la même façon que $\forall x_o \in I$ avec $x_o \neq \sup I$, f est continue à droite en x_o et ainsi :

$$\boxed{\text{f est continue sur I.}}$$