

Corrigé du DS n° 4

Exercice 1

1) Si $A = E$, on a $\forall X \in \mathcal{P}(E)$:

$$f(X) = X \cap E = X.$$

Donc $f = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$ qui est bijective donc surjective et injective. Ainsi :

$$A = E \Rightarrow f \text{ surjective et } f \text{ injective.}$$

Supposons que f est surjective.

Alors, $E \in \mathcal{P}(E)$ admet un antécédent X par f , soit $f(X) = X \cap A = E$ donc $E \subset A$.

Et comme $A \subset E$, on a bien $A = E$. Ainsi :

$$f \text{ surjective} \Rightarrow A = E.$$

Supposons que f est injective.

On a $f(E) = E \cap A = A$ et $f(A) = A \cap A = A$. Donc $f(A) = f(E)$.

Par injectivité de f , ceci implique que $A = E$ et ainsi :

$$f \text{ injective} \Rightarrow A = E.$$

Finalement, on a bien :

$f \text{ surjective} \Leftrightarrow A = E \Leftrightarrow f \text{ injective.}$

2) Si $A = \emptyset$, on a $\forall X \in \mathcal{P}(E)$:

$$g(X) = X \cup \emptyset = X.$$

Donc $g = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$ qui est bijective donc surjective et injective. Ainsi :

$$A = \emptyset \Rightarrow g \text{ surjective et } f \text{ injective.}$$

Supposons que g est surjective.

Alors, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ admet un antécédent X par g , soit $g(X) = X \cup A = \emptyset$.

Ceci implique immédiatement que $A = \emptyset$. Ainsi :

$$g \text{ surjective} \Rightarrow A = \emptyset.$$

Supposons que g est injective.

On a $g(\emptyset) = \emptyset \cup A = A$ et $g(A) = A \cup A = A$. Donc $g(A) = g(\emptyset)$.

Par injectivité de g , ceci implique que $A = \emptyset$ et ainsi :

$$g \text{ injective} \Rightarrow A = \emptyset.$$

Finalement, on a bien :

$g \text{ surjective} \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow g \text{ injective.}$

Exercice 2

1) $\forall x \in E$, on a $a * (e * x) = (a * e) * x = a * x$, donc $\gamma_a(e * x) = \gamma_a(x)$.

Comme γ_a est injective, on a $e * x = x$ et ainsi :

$$\forall x \in E, e * x = x.$$

2) Remarquons déjà que, d'après la question précédente, on a $e * a = a$.

Supposons qu'il existe $b \in E$ tel que $a * b = e$. On a alors :

- $\gamma_a(a * b) = a * (a * b) = a * e = a$.
- $\gamma_a(b * a) = a * (b * a) = (a * b) * a = e * a = a$.

Ainsi, $\gamma_a(b * a) = \gamma_a(a * b)$ et par injectivité de γ_a , on a $b * a = a * b$, donc :

a et b commutent.

3) Remarquons préalablement que l'hypothèse $\forall x \in E, \gamma_x : E \rightarrow E ; y \mapsto x * y$ est injective se traduit par :

$$\forall (x, y, y') \in E^3, x * y = x * y' \Rightarrow y = y'.$$

Si $u \in E$ est idempotent, on a $u * u = u$. Alors, $\forall x \in E, u * (u * x) = (u * u) * x = u * x$.

D'après la remarque préalable appliquée à $(u, u * x, x)$, on a $u * (u * x) = u * x \Rightarrow u * x = x$. Ainsi :

$$\forall x \in E, u * x = x.$$

4) Soient u et v idempotents tels que $u \neq v$.

Supposons qu'il existe $(x, y) \in E^2$ tel que $x * u = y * v$. Alors, $(x * u) * u = (y * v) * u$.

Or, $(x * u) * u = x * (u * u) = x * u = y * v$ et $(y * v) * u = y * (v * u)$, donc $y * v = y * (v * u)$.

D'après la remarque préalable appliquée à $(y, v, v * u)$, on a $v = v * u$.

Mais, v est idempotent, donc d'après la question précédente, on a $\forall z \in E, v * z = z$. En particulier, pour $z = u$, on obtient $v * u = u$.

Finalement, $v = u$, ce qui absurde. Ainsi :

Il n'existe aucun couple $(x, y) \in E^2$ tel que $x * u = y * v$.

5) Si E possède un élément neutre, notons-le e' . On a alors $a * e' = a$.

Or, par hypothèse, $a * e = a$. Ainsi, $a * e' = a * e$, soit $\gamma_a(e') = \gamma_a(e)$.

Comme γ_a est injective, on obtient $e' = e$ et donc :

Si E admet un élément neutre alors c'est e .

Si e est neutre, on a alors $e * e = e$ donc e est idempotent.

Supposons qu'il existe un autre élément $u \in E \setminus \{e\}$ idempotent.

Comme e est neutre, on a $u * e = u$ et comme u est idempotent, on a $u * u = u$. Ainsi, $u * u = u * e$, ce qui veut dire qu'il existe $(x, y) = (u, u) \in E^2$ tel que $x * u = y * e$. Ceci contredit la question précédente, donc :

e est le seul élément idempotent de E .

Exercice 3

$$1) \text{ On a } \overline{AB} \begin{vmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ et } \overline{AC} \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ donc } \overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Ainsi, $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ donc \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires et :

A, B et C ne sont pas alignés.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On a $\overline{AM} \begin{vmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{vmatrix}$ et :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AM}) = 0 \Leftrightarrow (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) - 2(y-1) + 8(z+1) = 0.$$

En réduisant et en simplifiant par 2 :

Une équation cartésienne de (ABC) est $2x - y + 4z + 1 = 0$.

2) Remarquons déjà que comme A, B et C ne sont pas alignés, $A \notin (BC)$ donc $H \neq A$ et (AH) est bien une droite. De plus, $H \in (BC) \subset (ABC)$, donc $(AH) \subset (ABC)$.

Comme $(AH) \perp (BC)$, on a $(AH) \subset P$ où P est le plan passant par A et tel que $(BC) \perp P$.

Un vecteur normal à P est $\overline{BC} \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$, donc $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BC} = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) - 2(z+1) = 0$.

En simplifiant, une équation de P est $2x - z - 5 = 0$ et comme $(AH) = (ABC) \cap P$:

Un système d'équations cartésiennes de (AH) est $\begin{cases} 2x - y + 4z + 1 = 0 \\ 2x - z - 5 = 0 \end{cases}$.

3) a. La sphère S_t de centre $\Omega_t(1, t, 1-t)$ et de rayon 2 est tangente au plan (ABC) si et seulement si la distance de Ω_t à (ABC) est égale à 2. On a :

$$d(\Omega_t, (ABC)) = \frac{|2x_{\Omega_t} - y_{\Omega_t} + 4z_{\Omega_t} + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|2-t + 4(1-t) + 1|}{\sqrt{21}} = \frac{|7-5t|}{\sqrt{21}}.$$

Donc, S_t est tangente au plan (ABC) si et seulement si $|7-5t|=2\sqrt{21}$, soit $t = \frac{7 \pm 2\sqrt{21}}{5}$.

$$S_t \text{ est tangente à (ABC) pour } t = t_1 = \frac{7-2\sqrt{21}}{5} \text{ ou } t = t_2 = \frac{7+2\sqrt{21}}{5}.$$

b. $S_t \cap (ABC)$ est un cercle si et seulement si $d(\Omega_t, (ABC)) = \frac{|7-5t|}{\sqrt{21}} < 2$, soit :

$$|5t-7| < 2\sqrt{21} \Leftrightarrow -2\sqrt{21} < 5t-7 < 2\sqrt{21} \Leftrightarrow \frac{7-2\sqrt{21}}{5} < t < \frac{7+2\sqrt{21}}{5}.$$

Ainsi :

$$S_t \cap (ABC) \text{ est un cercle si et seulement } t \in I = \left] \frac{7-2\sqrt{21}}{5}; \frac{7+2\sqrt{21}}{5} \right[.$$

c. Quand S_t et (ABC) se coupent en un cercle, le centre H_t de ce cercle est le projeté orthogonal de Ω_t sur le plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_t H_t}$ est alors colinéaire à tout vecteur normal à (ABC), en particulier $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$ qui

lui est colinéaire. On a donc, $\overrightarrow{\Omega_t H_t} = \lambda \vec{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, soit, si $H_t(x, y, z)$:

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -\lambda + t \\ z = 4\lambda + 1 - t \end{cases}$$

De plus, $H_t \in (ABC)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (ABC) trouvée à la question 1, soit :

$$2(2\lambda + 1) - (-\lambda + t) + 4(4\lambda + 1 - t) + 1 = 0.$$

De cette équation, on tire $\lambda = \frac{5t-7}{21}$ et ainsi :

$$\begin{cases} x = \frac{10t-7}{21} \\ y = \frac{16t+7}{21} \\ z = \frac{-t-7}{21} \end{cases}$$

Ceci est une représentation paramétrique de la droite Δ dirigée par $\vec{v}(10, 16, -1)$ et passant par le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Donc quand t décrit \mathbb{R} , H_t décrit Δ et quand t décrit $I =]t_1; t_2[$, H_t décrit le

segment $[H_{t_1}, H_{t_2}]$ privé de ses extrémités $H_{t_1}\left(\frac{10t_1-7}{21}, \frac{16t_1+7}{21}, \frac{-t_1-7}{21}\right)$ et $H_{t_2}\left(\frac{10t_2-7}{21}, \frac{16t_2+7}{21}, \frac{-t_2-7}{21}\right)$.

Ainsi :

$$\text{Le lieu des points } H_t \text{ lorsque } t \text{ varie dans } I \text{ est } [H_{t_1}, H_{t_2}] \setminus \{H_{t_1}, H_{t_2}\}.$$

4) On a vu que qu'une équation de (ABC) est $2x - y + 4z + 1 = 0$. Clairement, les coordonnées $(0,0,0)$ de O ne vérifient pas cette équation donc $O \notin (ABC)$ et ainsi :

(AB) et (OC) ne sont pas coplanaires.

Appelons D la perpendiculaire commune à (AB) et (OC) , et E le point d'intersection de D et (OC) .

Tout vecteur orthogonal à \overline{AB} et \overline{OC} dirige D , en particulier $\overline{AB} \wedge \overline{OC} \begin{cases} 4 \\ -3 \\ 7 \end{cases}$.

Appelons E et F les intersections de D avec (AB) et (OC) respectivement.

- Le point E est sur (AB) donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{AE} = a\overline{AB}$, soit $\begin{cases} x_E = 2 - 5a \\ y_E = 1 - 2a \\ z_E = -1 + 2a \end{cases}$.
- Le point F est sur (OC) donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{OF} = b\overline{OC}$, soit $\begin{cases} x_F = b \\ y_F = -b \\ z_F = -b \end{cases}$.

Mais $(EF) = D$ est perpendiculaire à (AB) et (OC) donc $\overline{AB} \cdot \overline{EF} = \overline{OC} \cdot \overline{EF} = 0$, soit :

$$\overline{AB} \cdot \overline{EF} = -5(x_F - x_E) - 2(y_F - y_E) + 2(z_F - z_E) = -5b - 33a + 14 = 0$$

$$\overline{OC} \cdot \overline{EF} = (x_F - x_E) - (y_F - y_E) - (z_F - z_E) = 5a + 3b - 2 = 0$$

On a donc $a = \frac{2-3b}{5}$ et $5b + 33\frac{2-3b}{5} = 14$, soit $b = -\frac{2}{37}$ et ainsi $F\left(-\frac{2}{37}, \frac{2}{37}, \frac{2}{37}\right)$.

Finalement, D passe par $F\left(-\frac{2}{37}, \frac{2}{37}, \frac{2}{37}\right)$ et est dirigée par $\overline{AB} \wedge \overline{OC} \begin{cases} 4 \\ -3 \\ 7 \end{cases}$. Ainsi :

Une représentation paramétrique de D est $\begin{cases} x = -\frac{2}{37} + 4t \\ y = \frac{2}{37} - 3t \\ z = \frac{2}{37} + 7t \end{cases}$.

5) Remarquons déjà que :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow \overline{AM} \wedge \overline{BC} = \overline{BM} \wedge \overline{AC} \\ &\Leftrightarrow \overline{AM} \wedge \overline{BC} - \overline{AM} \wedge \overline{AC} = \overline{BA} \wedge \overline{AC} \\ &\Leftrightarrow \overline{AM} \wedge (\overline{BC} - \overline{AC}) = \overline{BA} \wedge \overline{AC} \\ &\Leftrightarrow \overline{AM} \wedge \overline{BA} = -\overline{AC} \wedge \overline{BA} \\ &\Leftrightarrow \overline{AM} \wedge \overline{BA} + \overline{AC} \wedge \overline{BA} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (\overline{AM} + \overline{AC}) \wedge \overline{BA} = \vec{0} \end{aligned}$$

Si on appelle C' le symétrique de C par rapport à A , on $\overline{AC} = -\overline{AC'}$ et :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow (\overline{AM} - \overline{AC'}) \wedge \overline{BA} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overline{C'M} \wedge \overline{BA} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overline{C'M} \text{ et } \overline{AB} \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

Finalement :

\mathcal{L} est la droite parallèle à (AB) et passant par le symétrique de C par rapport à A .

Exercice 4

1) Soit f une fonction affine de la forme $f : x \mapsto ax$ avec a réel fixé.

On a clairement f définie et continue sur \mathbb{R} et $f(0) = 0$. De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a \frac{x+y}{2} = \frac{ax+ay}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Ainsi :

Les fonctions linéaires sont bien solutions du problème.

2) a. Par hypothèse, f est définie sur \mathbb{R} qui est symétrique par rapport à 0 et en posant $y = -x$ dans (E), on a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{x-x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \Leftrightarrow f(x)+f(-x) = 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x).$$

Donc :

f est impaire.

b. Remarquons déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a, en remplaçant x et y par $(n+2)x$ et nx dans (E) :

$$f((n+2)x) + f(nx) = 2f\left(\frac{(n+2)x + nx}{2}\right) = 2f((n+1)x).$$

Ceci se récrit $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f((n+2)x) - f((n+1)x) = f((n+1)x) - f(nx)$, ce qui montre que pour x fixé, la suite $(f((n+1)x) - f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, donc tous ses termes sont égaux à son premier terme, soit $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f((n+1)x) - f(nx) = f(1 \times x) - f(0 \times x) = f(x) - f(0) = f(x).$$

Ainsi, on a bien :

$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f((n+1)x) - f(nx) = f(x)$.

c. Le résultat ci-dessus se reformule en $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(kx) - f((k-1)x) = f(x)$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $\sum_{k=1}^n [f(kx) - f((k-1)x)] = \sum_{k=1}^n f(x) = f(x) \sum_{k=1}^n 1 = nf(x)$.

Or, par télescopage, on a $\sum_{k=1}^n [f(kx) - f((k-1)x)] = f(nx) - f((1-1)x) = f(nx) - f(0) = f(nx)$. Ainsi, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, f(nx) = nf(x).$$

Comme $f(0) = 0$, cette formule reste valable pour $n = 0$ et donc, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x).$$

d. En posant $x = 1$ dans le résultat ci-dessus, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$. Et avec $f(1) = a$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an.$$

Comme f est impaire, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(-n) = -f(n) = -an = a(-n)$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = an.$$

Soit maintenant $r \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $r = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On a $p = qr$ donc $f(qr) = f(p) = ap$. Or, d'après la question précédente, $f(qr) = qf(r)$.

Par conséquent, $qf(r) = ap$, soit $f(r) = a\frac{p}{q} = ar$. Ainsi :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar.$$

Enfin, on sait que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} donc $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x . D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = ar_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = a \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = ax$.

Mais par hypothèse, f est continue sur \mathbb{R} , donc en x . Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = f(x)$ et ainsi $f(x) = ax$.

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax.$$

3) On vient de voir que toute solution du problème est une fonction linéaire. Or, d'après la question 1, toutes fonctions linéaires sont solution du problème et donc :

Les fonctions vérifiant les hypothèses de l'énoncé sont les fonctions linéaires.

Exercice 5

1) Comme f est définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$, on a $\forall x \in [a, b], f(x) \in [a, b]$, soit $a \leq f(x) \leq b$.

Ceci est en particulier vrai pour $x = a$, donc $a \leq f(a)$ et ainsi, $a \in A$, ce qui prouve que A est non vide.

Par définition, $A \subset [a, b]$ donc A est majorée par b et ainsi :

A est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} .

$A \subset [a, b]$ admet donc une borne supérieure $c = \sup(A)$ qui appartient à $[a, b]$.

2) On a $c = \sup(A)$ donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in A$ tel que $c - \varepsilon < \alpha \leq c$.

Comme f est croissante, on a alors $f(\alpha) \leq f(c)$.

Or, $\alpha \in A$ donc $\alpha \leq f(\alpha)$ et ainsi, $c - \varepsilon < \alpha \leq f(\alpha) \leq f(c)$. Ceci prouve que $\forall \varepsilon > 0, c - \varepsilon < f(c)$ donc que :

$$f(c) \geq c$$

Supposons maintenant que $f(c) > c$.

Alors, il existe $x \in [a, b]$, tel que $c < x < f(c)$ et par croissance de f , on a $f(c) \leq f(x)$.

Or, si $x > c$, alors $x \notin A$ (car $c = \sup(A)$) et ainsi, $f(x) < x$ (car par définition de $A, x \in A \Leftrightarrow f(x) \geq x$).

Ainsi, on a $x < f(c) \leq f(x) < x$ ce qui est absurde. Ainsi :

$$f(c) \leq c$$

3) D'après ce qui précède, on a $f(c) \geq c$ et $f(c) \leq c$, donc $f(c) = c$. Comme $c \in [a, b]$:

f admet c pour point fixe.

Exercice 6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Le résultat voulu est trivial pour $n = 1$, donc dans ce qui suit, on suppose $n \geq 2$.

Remarquons que $\left(x + \frac{n-1}{n}\right) - \left(x + \frac{0}{n}\right) = \frac{n-1}{n}$ donc $0 \leq \left(x + \frac{n-1}{n}\right) - \left(x + \frac{0}{n}\right) < 1$ ce qui implique qu'entre

$x + \frac{0}{n}$ et $x + \frac{n-1}{n}$, il existe au plus un entier (c'est-à-dire aucun ou un entier).

Considérons les deux cas successivement :

- S'il n'existe pas d'entier strictement entre $x + \frac{0}{n}$ et $x + \frac{n-1}{n}$, alors $E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = E\left(x + \frac{0}{n}\right) = E(x)$.

De plus, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $x + \frac{0}{n} \leq x + \frac{k}{n} \leq x + \frac{n-1}{n}$, donc $E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(x)$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} E(x) = nE(x).$$

Or, on a $E(x) \leq x$ donc $nE(x) \leq nx$.

Mais, si $E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = E(x)$, on a $x + \frac{n-1}{n} < E(x) + 1$ donc $nx + n - 1 < nE(x) + n$, soit $nx < nE(x) + 1$.

Ainsi, $nE(x) \leq nx < nE(x) + 1$ et comme $nE(x)$ est entier, on a $E(nx) = nE(x)$, d'où le résultat.

- S'il existe un entier N strictement entre $x + \frac{0}{n}$ et $x + \frac{n-1}{n}$, alors $\exists p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que :

$$x + \frac{0}{n} \leq \dots \leq x + \frac{p-1}{n} < N \leq x + \frac{p}{n} \leq \dots \leq x + \frac{n-1}{n}.$$

On a alors $E(x) = N - 1$ et :

$$\begin{aligned} E\left(x + \frac{0}{n}\right) &= E\left(x + \frac{1}{n}\right) = \dots = E\left(x + \frac{p-1}{n}\right) = E(x) \\ E\left(x + \frac{p}{n}\right) &= E\left(x + \frac{p+1}{n}\right) = \dots = E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = E(x) + 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{p-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) + \sum_{k=p}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} E(x) + \sum_{k=p}^{n-1} (E(x) + 1) \\ &= pE(x) + (n-1-p+1)(E(x) + 1) \\ &= nE(x) + n - p \end{aligned}$$

Or, on a vu que $E(x) = N - 1$ et $x + \frac{p-1}{n} < N \leq x + \frac{p}{n}$ donc :

$$x + \frac{p-1}{n} < E(x) + 1 \leq x + \frac{p}{n} \Leftrightarrow nx + p - 1 < nE(x) + n \leq nx + p \Leftrightarrow nE(x) + n - p \leq nx < nE(x) + n - p + 1.$$

Et ainsi, $E(nx) = nE(x) + n - p$, d'où le résultat.

Finalement, dans les deux cas, on a bien :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).}$$