

Corrigés des TD du Chapitre 13

Exercice 1

On a, $\forall ((x, y), (x', y')) \in E^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

- (E, \oplus) est un groupe commutatif. En effet :
 - $xx' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y + y' \in \mathbb{R}$ donc $(x, y) \oplus (x', y') \in E$ et la loi \oplus est interne.
 - L'addition et la multiplication des réels étant associatives et commutatives, \oplus l'est aussi.
 - $(x, y) \oplus (1, 0) = (x, y)$ et $(1, 0) \in E$ donc $(1, 0)$ est élément neutre de \oplus .
 - $\forall (x, y) \in E$, on a $x > 0$ donc $1/x > 0$ d'où $(1/x, -y) \in E$ et $(x, y) \oplus (1/x, -y) = (1, 0)$ donc (x, y) admet un symétrique dans E .
- $x > 0$ et x^λ est défini et strictement positif, donc $\lambda \odot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y) \in E$.
- $1 \odot (x, y) = (x^1, 1 \times y) = (x, y)$.
- $\lambda \odot (\mu \odot (x, y)) = \lambda \odot (x^\mu, \mu y) = ((x^\mu)^\lambda, \lambda(\mu y)) = (x^{\mu\lambda}, \lambda\mu y) = \lambda\mu \odot (x, y)$
- $(\lambda + \mu) \odot (x, y) = (x^{\lambda+\mu}, (\lambda + \mu)y) = (x^\lambda x^\mu, \lambda y + \mu y) = (x^\lambda, \lambda y) \oplus (x^\mu, \mu y) = [\lambda \odot (x, y)] \oplus [\mu \odot (x, y)]$
- Enfin :

$$\begin{aligned} \lambda \odot ((x, y) \oplus (x', y')) &= \lambda \odot (xx', y + y') = ((xx')^\lambda, \lambda(y + y')) = (x^\lambda x'^\lambda, \lambda y + \lambda y') \\ &= (x^\lambda, \lambda y) \oplus (x'^\lambda, \lambda y') = [\lambda \odot (x, y)] \oplus [\lambda \odot (x', y')] \end{aligned}$$

Finalement :

(E, \oplus, \odot) est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 2

- a. Non, car si $f \in E$, alors $-f \notin E$ (sauf si f est nulle).
- b. Non, car pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + x + 1$, on a $(f, g) \in E^2$ mais $f - g \notin E$.
- c. Non, car si $f \in E$, alors $-f \notin E$ (sauf si f est nulle).
- d. Non, car pour $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$, on a $(f, g) \in E^2$ mais $f - g \notin E$.
- e. Non, car $0_{\mathbb{R}} \notin E$ ($0_{\mathbb{R}}$ désignant la fonction nulle sur \mathbb{R}).
- f. Oui, car $0_{\mathbb{R}} \in E$ et $\forall (f, g) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$ donc $\lambda f + \mu g \in E$ et E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- g. Oui, car toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable donc E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- h. Oui, car $0_{\mathbb{N}} \in E$ ($0_{\mathbb{N}}$ étant la suite nulle) et $\forall (u, v) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $(\lambda u + \mu v)_3 = \lambda u_3 + \mu v_3 = 0$ donc $\lambda u + \mu v \in E$ et E est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- i. Non, car $0_{\mathbb{N}} \notin E$.

- j. Oui. En effet, $E \subset \mathbb{R}[x]$ (où $\mathbb{R}[x]$ est l'espace vectoriel des fonctions polynômes) et si f et g sont deux fonctions polynômes de racine 1, soit $f(1) = g(1) = 0$, on a clairement $(\lambda f + \mu g)(1) = 0$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ donc $\lambda f + \mu g \in E$ et E est un s.e.v. de $\mathbb{R}[x]$.
- k. Non, car $0_{\mathbb{R}} \notin E$ (la fonction nulle admet une infinité de racines).

Exercice 3

1) Si F est un sous-espace de E , alors $0_E \in F$, donc $0_E \notin E \setminus F$ et ainsi :

$E \setminus F$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

2) Certaines implications sont claires :

- (ii) \Rightarrow (i) (car $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E).
- (iii) \Rightarrow (ii) (car, si $F \subset G$, $F \cup G = F+G = G$ et si $G \subset F$, $F \cup G = F+G = F$).

Pour finir de prouver les équivalences, il faut juste prouver que (i) \Rightarrow (iii).

En effet, on aura alors (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) donc (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).

Supposons donc que l'on ait (i), c'est-à-dire que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Supposons en outre que $F \not\subset G$. Prouvons alors que forcément $G \subset F$.

Comme $F \not\subset G$, il existe $x_0 \in F$ tel que $x_0 \notin G$. Comme $F \subset F \cup G$, on a $x_0 \in F \cup G$.

$\forall x \in G$, on a $G \subset F \cup G$ donc $x \in F \cup G$.

Or, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel, donc $x + x_0 \in F \cup G$, c'est-à-dire que $x + x_0 \in F$ ou $x + x_0 \in G$.

Mais, si $x + x_0 \in G$, on a, avec $x \in G$, $x_0 = (x + x_0) - x \in G$, ce qui est absurde par hypothèse sur x_0 .

Donc, $x + x_0 \in F$. Mais comme $x_0 \in F$, on a $x = (x + x_0) - x_0 \in F$. Ainsi, $\forall x \in G$, $x \in F$ donc $G \subset F$.

Ainsi, (i) \Rightarrow (iii) et finalement :

(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).

3) Remarquons déjà que $F \cap (G+H)$, $F \cap G$, $F \cap H$ et $F \cap G + F \cap H$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

De plus, on a $G \subset G+H$ donc $F \cap G \subset F \cap (G+H)$ et de même, $F \cap H \subset F \cap (G+H)$.

Ainsi, quels que soient F , G et H , on a toujours $F \cap G + F \cap H \subset F \cap (G+H)$.

La question est de savoir si l'inclusion réciproque est vraie.

Si x_1 et x_2 sont deux vecteurs non colinéaires de E , posons $G = \text{Vect}(x_1)$, $H = \text{Vect}(x_2)$ et $F = \text{Vect}(x_1 + x_2)$.

Alors :

$$\left. \begin{array}{l} F \subset G+H \Rightarrow F \cap (G+H) = F \neq \{0_E\} \\ F \cap G = F \cap H = \{0_E\} \Rightarrow F \cap G + F \cap H = \{0_E\} \end{array} \right\} \Rightarrow F \cap (G+H) \neq F \cap G + F \cap H.$$

Ainsi :

On n'a pas $F \cap (G+H) = F \cap G + F \cap H$ en général.

Remarque : l'égalité est vraie si on ne peut pas trouver deux vecteurs non colinéaires de E , c'est-à-dire si E est une droite vectorielle (les seules sous-espaces de E étant alors $\{0_E\}$ et E lui-même).

4) Comme $G \subset H$, il suffit de prouver l'inclusion réciproque pour montrer que $G = H$.

Soit $x \in H$. Comme $H \subset F+H = F+G$, on a $x \in F+G$ et donc, il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Or, $G \subset H$ donc $x_G \in H$ et avec $x \in H$, on a $x_F = x - x_G \in H$. Donc $x_F \in F \cap H = F \cap G \subset G$.

Alors, $x_G \in G$ et $x_F \in G$ donc $x = x_F + x_G \in G$. Ainsi, $\forall x \in H, x \in G$ donc $H \subset G$.

Finalement, on a bien :

$$(G \subset H, F+G = F+H \text{ et } F \cap G = F \cap H) \Rightarrow G = H$$

Si on n'a pas $G \subset H$, alors l'implication est mise en défaut.

En effet, plaçons-nous dans $E = \mathbb{R}^2$ et prenons x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs non colinéaires deux à deux.

Si x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs non colinéaires de E , posons $H = \text{Vect}(x_1)$, $G = \text{Vect}(x_2)$ et $F = \text{Vect}(x_3)$.

Comme x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires, $G \not\subset H$ (et bien sûr $G \neq H$!). Mais :

- Comme x_1 et x_3 ne sont pas colinéaires, $F+H = E$ et $F \cap H = \{0_E\}$.
- Comme x_2 et x_3 ne sont pas colinéaires, $F+G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Donc $F+G = F+H$ et $F \cap G = F \cap H$ mais $G \neq H$.

Exercice 4

a. u_1 n'est pas linéaire à cause du terme en y^2 qui ne l'est pas.

b. u_2 est linéaire. En effet, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} u_2(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= u_2(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = (\lambda x + \mu x', \lambda x + \mu x') \\ &= \lambda(x, x) + \mu(x', x') = \lambda u_2(x, y, z) + \mu u_2(x', y', z') \end{aligned}$$

c. u_3 n'est pas linéaire à cause du terme en $\cos y$ qui ne l'est pas.

d. u_4 est linéaire. En effet, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} u_4(\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')) &= u_4(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z', \lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda(z, x, y) + \mu(z', x', y') = \lambda u_4(x, y, z) + \mu u_4(x', y', z') \end{aligned}$$

Exercice 5

a) Il est clair que les homothéties ($u(x) = \lambda x$ pour tout x de E) sont dans E_1 et en particulier $u = 0$.

Soit maintenant un élément u non nul de E_1 .

- si $u(x) \neq 0$ (alors $x \neq 0$), la famille $(x, u(x))$ est liée implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ (mais attention : a priori, ce scalaire dépend de x).
- si $u(x) = 0$, on peut aussi écrire $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda = 0$.

Finalement, $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.

Soient maintenant x et x' deux vecteurs quelconques de E .

- Si (x, x') est liée avec $x \neq 0$, on a $x' = kx$ avec $k \neq 0$. Alors $u(x') = ku(x) = k\lambda_x x = \lambda_x x' = \lambda_x kx$ donc $\lambda_x = \lambda_{x'}$. De même, si (x, x') est liée avec $x' \neq 0$.

- Si (x, x') est libre, on peut écrire d'une part $u(x + x') = \lambda_{x+x'}(x + x') = \lambda_{x+x'}x + \lambda_{x+x'}x'$, et d'autre part, $u(x + x') = u(x) + u(x') = \lambda_x x + \lambda_{x'}x'$. Ainsi, $\lambda_{x+x'}x + \lambda_{x+x'}x' = \lambda_x x + \lambda_{x'}x'$ et comme la famille (x, x') est libre, on obtient $\lambda_{x+x'} = \lambda_x = \lambda_{x'}$.

Finalement, $\forall (x, x') \in E^2$, $\lambda_x = \lambda_{x'}$, donc il existe un scalaire λ tel que $\forall x \in E$, $u(x) = \lambda x$ et u est une homothétie. Ainsi :

E_1 est l'ensemble des homothéties.

b) Ici aussi, il est évident que les homothéties sont dans E_2 soit $E_1 \subset E_2$.

Soit u un élément non nul de E_2 . $\forall x \in E \setminus \{0\}$, appelons v la symétrie par rapport à $\text{Vect}(x)$.

Rappelons qu'un vecteur est invariant par v si et seulement si il appartient à $\text{Vect}(x)$ (en particulier $v(x) = x$). Comme $v \in GL(E)$, $v(u(x)) = u(v(x)) = u(x)$ donc $u(x)$ est invariant par v , il appartient $\text{Vect}(x)$, autrement dit, $(x, u(x))$ est liée. Il est clair que $(0, u(0))$ est liée donc $\forall x \in E$, $(x, u(x))$ est liée et ainsi, $u \in E_1$.

Donc, $E_2 \subset E_1$ et finalement :

$$E_2 = E_1$$

Exercice 6

Du fait de la linéarité de l'intégrale, u est clairement linéaire. De plus comme, les primitives de fonctions continues sont continues et u est bien à images dans E . Ainsi :

u est un endomorphisme de E .

$\forall f \in E$, $u(f)(0) = 0$ donc si $g \in \text{Im } u$, $g(0) = 0$ or toute fonction de E ne s'annule pas en 0 donc :

u n'est pas surjectif.

Remarquons préalablement que $\forall f \in E$, $u(f)$ est une primitive donc est dérivable sur \mathbb{R} .

Soit $f \in \ker u$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(f)(x) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} u(f)(x) &= \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = \int_0^x (\cos x \cos t + \sin x \sin t)f(t)dt = \cos x \int_0^x \cos t f(t)dt + \sin x \int_0^x \sin t f(t)dt \\ &= f(x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + \int_0^x (\cos x \sin t - \sin x \cos t)f(t)dt = f(x) - \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt \end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t)dt = \sin x \int_0^x \cos t f(t)dt - \cos x \int_0^x \sin t f(t)dt.$$

On a $f(0) = 0$ et, comme f est une primitive, elle est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \int_0^x \cos t f(t)dt + \sin x \cos x f(x) + \sin x \int_0^x \sin t f(t)dt - \cos x \sin x f(x) \\ &= \int_0^x (\cos x \cos t + \sin x \sin t)f(t)dt = \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = u(f)(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc f est constante et comme $f(0) = 0$, f est nulle. Ainsi, $\ker u = \{0\}$ donc :

u est injective.

Exercice 7

1. Remarquons déjà que quelles que soient f et g , on a $\forall x \in \ker f$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $x \in \ker(g \circ f)$ et ainsi, $\ker f \subset \ker(g \circ f)$. Il faut donc prouver que $\ker(g \circ f) \subset \ker f \Leftrightarrow \text{Im} f \cap \ker g = \{0\}$.

(\Rightarrow) Si $\ker(g \circ f) \subset \ker f$, alors $\forall x \in \text{Im} f \cap \ker g$, on a :

- $x \in \text{Im} f$ donc $\exists z \in E$ tel que $x = f(z)$;
- $x \in \ker g$ donc $g(x) = 0$.

Alors, $g(x) = g(f(z)) = (g \circ f)(z) = 0$ donc $z \in \ker(g \circ f) \subset \ker f$. Alors, $x = f(z) = 0$. Ainsi, $\text{Im} f \cap \ker g = \{0\}$.

(\Leftarrow) Si $\text{Im} f \cap \ker g = \{0\}$, alors $\forall x \in \ker(g \circ f)$, on a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \ker g$ et comme, on a évidemment $f(x) \in \text{Im} f$, on obtient $f(x) \in \text{Im} f \cap \ker g = \{0\}$.

Ainsi, $f(x) = 0$ et $x \in \ker f$ donc $\ker(g \circ f) \subset \ker f$.

Finalement, on a bien :

$\ker f = \ker(g \circ f) \Leftrightarrow \text{Im} f \cap \ker g = \{0\}$

2. Il est clair que comme $\ker g \subset E$, on a $f(\ker g) \subset f(E) = \text{Im} f$ quel que soit f .

Prouver que $f(\ker g) = \text{Im} f$ revient donc à prouver que $\text{Im} f \subset f(\ker g)$, c'est-à-dire que $\forall y \in \text{Im} f$, il existe $x_0 \in \ker g$ tel que $y = f(x_0)$.

Or, $\text{Im} f \subset \text{Im} f \oplus \text{Im} g = \text{Im}(f + g)$ donc $\forall y \in \text{Im} f$, on a $y \in \text{Im}(f + g)$.

Donc il existe $x_0 \in E$ tel que $y = (f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$. Alors, $y - f(x_0) = g(x_0)$.

Comme $y \in \text{Im} f$ et $f(x_0) \in \text{Im} f$, on a $y - f(x_0) \in \text{Im} f$ et $g(x_0) \in \text{Im} g$ donc $y - f(x_0) = g(x_0) \in \text{Im} f \cap \text{Im} g$.

Mais, la somme $\text{Im} f \oplus \text{Im} g$ étant directe, on a $\text{Im} f \cap \text{Im} g = \{0\}$ et ainsi, $y - f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Ceci prouve que $y = f(x_0)$ avec $g(x_0) = 0$, soit $x_0 \in \ker g$. Ainsi, $y \in f(\ker g)$ et donc $\text{Im} f \subset f(\ker g)$.

Ainsi, on a bien :

$f(\ker g) = \text{Im} f$

Comme f et g jouent exactement le même rôle dans les hypothèses, on a de la même façon :

$g(\ker f) = \text{Im} g$

Par ailleurs, quels que soient f et g , on a toujours $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f + g)$. En effet, $\forall x \in \ker f \cap \ker g$, on a $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$ donc $x \in \ker(f + g)$.

Par ailleurs, $\forall x \in \ker(f + g)$, on a $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0$ donc $f(x) = -g(x) = g(-x) \in \text{Im} f \cap \text{Im} g = \{0\}$ et ainsi, $f(x) = g(x) = 0$, soit $x \in \ker f \cap \ker g$. Ceci montre que $\ker(f + g) \subset \ker f \cap \ker g$.

Finalement, on a bien :

$\ker(f + g) = \ker f \cap \ker g$

3. Si $\text{Im} f \cap \text{Im} g = \{0\}$, il suffit d'établir que $\text{Im}(f + g) = \text{Im} f + \text{Im} g$ pour avoir $\text{Im}(f + g) = \text{Im} f \oplus \text{Im} g$.

De plus, remarquons que, quels que soient f et g , il est clair que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im} f + \text{Im} g$.

Soit maintenant $y \in \text{Im } f + \text{Im } g$. On a alors $y = f(x_1) + g(x_2)$ avec $(x_1, x_2) \in E^2$. Mais :

- $f(x_1) \in \text{Im } f = f(\ker g)$ donc il existe $z_1 \in \ker g$ tel que $f(x_1) = f(z_1)$;
- $g(x_2) \in \text{Im } g = g(\ker f)$ donc il existe $z_2 \in \ker f$ tel que $g(x_2) = g(z_2)$.

Avec $g(z_1) = f(z_2) = 0$, on peut alors écrire :

$$y = f(x_1) + g(x_2) = f(z_1) + g(z_2) = f(z_1) + g(z_1) + f(z_2) + g(z_2) = (f + g)(z_1 + z_2).$$

Ceci prouve que $y \in \text{Im}(f + g)$ et ainsi, $\text{Im } f + \text{Im } g \subset \text{Im}(f + g)$.

Finalement, on a $\text{Im } f + \text{Im } g = \text{Im}(f + g)$ et avec $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$, on obtient :

$$\boxed{\text{Im}(f + g) = \text{Im } f \oplus \text{Im } g}$$

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Il existe alors $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

Alors, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $f(x_0) \in \mathbb{K}^*$ et $f\left(\frac{\lambda}{f(x_0)} x_0\right) = \frac{\lambda}{f(x_0)} f(x_0) = \lambda$ donc λ admet un antécédent par f et ainsi :

f est surjective.

Exercice 9

On veut prouver que $E = \ker u \oplus \text{Im } u^2$.

- $\forall x \in \ker u \cap \text{Im } u^2$, on a $u(x) = 0$ et $\exists z \in E$ tel que $x = u^2(z)$. Alors, $0 = u(x) = u^3(z) = u(z)$ car $u^3 = u$.
Donc, $x = u^2(z) = u(u(z)) = u(0) = 0$ et donc $\ker u \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$.
- Prouver la somme, raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in \ker u + \text{Im } u^2$, soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker u$, soit $u(x_1) = 0$ et $x_2 \in \text{Im } u^2$, soit $x_2 = u^2(z)$ avec $z \in E$. On a alors $x = x_1 + u^2(z)$ et $u(x) = u(x_1) + u^3(z) = u(z)$ (car $u^3 = u$) donc $x_2 = u^2(z) = u^2(x)$ et $x_1 = x - u^2(x)$.

Synthèse : Réciproquement, $\forall x \in E$, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec :

- $x_1 = x - u^2(x) \in \ker u$ car $u(x - u^2(x)) = u(x) - u^3(x) = 0$ (avec $u^3 = u$).
- $x_2 = u^2(x) \in \text{Im } u^2$.

Ainsi, $\forall x \in E$, $x \in \ker u + \text{Im } u^2$ donc $\underline{E = \ker u + \text{Im } u^2}$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{E = \ker u \oplus \text{Im } u^2}$$

Exercice 10

a. Procédons par analyse-synthèse. Si x est une solution de $x + f(x) = u$, on a $x = u - f(x)$ **(1)**, alors :

- En appliquant f à l'égalité **(1)**, on obtient $f(x) = f(u) - f^2(x)$ **(2)**.
- En appliquant f à l'égalité **(2)**, on obtient $f^2(x) = f^2(u) - f^3(x)$. Or, $f^3 = \text{Id}$ donc $f^2(x) = f^2(u) - x$ **(3)**.

Alors, en réinjectant **(3)** dans **(2)**, on obtient $f(x) = f(u) - [f^2(u) - x] = f(u) - f^2(u) + x$ **(2')** et en réinjectant **(2')** dans **(1)**, on a $x = u - [f(u) - f^2(u) + x] = u - f(u) + f^2(u) - x$, soit :

$$x = \frac{1}{2}(u - f(u) + f^2(u)).$$

Réciproquement, si $X = \frac{1}{2}(u - f(u) + f^2(u))$, on a :

$$f(X) = \frac{1}{2}(f(u) - f^2(u) + f^3(u)) = \frac{1}{2}(f(u) - f^2(u) + u)$$

Et :

$$f(X) + X = \frac{1}{2}(f(u) - f^2(u) + u) + \frac{1}{2}(u - f(u) + f^2(u)) = u$$

Donc X est bien solution.

Finalement :

$$\text{L'équation } f(x) + x = u \text{ admet une unique solution : } \frac{1}{2}(u - f(u) + f^2(u)).$$

b. Si on essaye la même technique ici, on se retrouve avec $x = u + f(x)$, puis $f(x) = f(u) + f^2(x)$ et $f^2(x) = f^2(u) + x$, ce qui donne en réinjectant : $x = u + f(u) + f^2(u) + x$, soit $u + f(u) + f^2(u) = 0$.

Ceci montre que si $u + f(u) + f^2(u) \neq 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $u + f(u) + f^2(u) = 0$, cela veut dire que $u \in \ker(\text{Id} + f + f^2)$.

Or, remarquons que $f^3 = \text{Id} \Leftrightarrow f^3 - \text{Id} = (\text{Id} + f + f^2)(f - \text{Id}) = (f - \text{Id})(\text{Id} + f + f^2) = 0$.

Prouvons que $E = \ker(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id})$.

- $\forall x \in \ker(f - \text{Id}) \cap \text{Im}(f - \text{Id})$, on a $f(x) = x$ et $x = f(z) - z$ avec $z \in E$.

Donc $x = f(x) = f^2(z) - f(z)$ et $x = f(x) = f^3(z) - f^2(z) = z - f^2(z) = z - x - f(z) = -2x$, d'où $x = 0$.

Ainsi, $\ker(f - \text{Id}) \cap \text{Im}(f - \text{Id}) = \{0\}$.

- $\forall x \in E$, supposons que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(f - \text{Id})$ et $x_2 \in \text{Im}(f - \text{Id})$.

On a alors $f(x_1) = x_1$ et $x_2 = f(z) - z$ avec $z \in E$. Donc :

$$x = x_1 + f(z) - z$$

$$f(x) = x_1 + f^2(z) - f(z)$$

$$f^2(x) = x_1 + z - f^2(z)$$

En additionnant ces trois relations, on obtient $3x_1 = x + f(x) + f^2(x)$, soit $x_1 = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$.

Réciproquement, $\forall x \in E$, on a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$ et $x_2 = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x))$, et :

$$f(x_1) = \frac{1}{3}(f(x) + f^2(x) + f^3(x)) = x_1 \text{ donc } x_1 \in \ker(f - \text{Id}).$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(x - f(x) - f^2(x) + x) = f\left(\frac{f^2(x) - x}{3}\right) - \frac{f^2(x) - x}{3} \text{ donc } x_2 \in \text{Im}(f - \text{Id}).$$

Ainsi, $x \in \ker(f - \text{Id}) + \text{Im}(f - \text{Id})$ donc :

$$E = \ker(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id})$$

Prouvons alors que $\ker(\text{Id} + f + f^2) = \text{Im}(f - \text{Id})$.

- $\forall x \in \text{Im}(f - \text{Id})$, il existe $z \in E$ tel que $x = (f - \text{Id})(z)$ et $(\text{Id} + f + f^2)(x) = (\text{Id} + f + f^2)(f - \text{Id})(z) = 0$ donc $x \in \ker(\text{Id} + f + f^2)$ et ainsi, $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \ker(\text{Id} + f + f^2)$.
- $\forall x \in \ker(\text{Id} + f + f^2)$, on a d'après ce qu'on a vu plus haut $x_1 = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)) = 0$ donc $x = x_2 \in \text{Im}(f - \text{Id})$ et ainsi, $\ker(\text{Id} + f + f^2) \subset \text{Im}(f - \text{Id})$.

Finalement, on a :

$$\ker(\text{Id} + f + f^2) = \text{Im}(f - \text{Id})$$

Alors, La condition $u \in \ker(\text{Id} + f + f^2)$ équivaut à $u \in \text{Im}(f - \text{Id})$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in E$ tel que $u = f(v) - v$.

Dans ce cas, l'équation $f(x) - x = u$ devient $f(x) - x = f(v) - v$ ou encore $(f - \text{Id})(x - v) = 0$.

Ainsi, x est solution de $f(x) - x = u$ si et seulement si $x - v \in \ker(f - \text{Id})$ et l'ensemble des solutions est alors :

$$v + \ker(f - \text{Id}) \text{ avec } u = f(v) - v$$

Exercice 11

a. On a :

$$p \circ q = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E, p(q(x)) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \text{Im} q, p(y) = 0 \Leftrightarrow \text{Im} q \subset \ker p.$$

b. On sait que si q est la projection sur $\text{Im} q$ parallèlement à $\ker q$ alors $\text{Id} - q$ est la projection sur $\text{Im}(\text{Id} - q) = \ker q$ parallèlement à $\ker(\text{Id} - q) = \text{Im} q$. Donc d'après la question précédente :

$$p \circ q = p \Leftrightarrow p - p \circ q = p \circ (\text{Id} - q) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(\text{Id} - q) = \ker p \subset \ker p.$$

c. $p + q$ est un projecteur $\Leftrightarrow (p + q)^2 = p + q$.

Or, $p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q$ donc :

$$p + q \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0.$$

(\Leftarrow) Il est alors clair que si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $p \circ q + q \circ p = 0$ donc :

$$p + q \text{ est un projecteur.}$$

(\Rightarrow) Supposons que $p + q$ est un projecteur. Alors $p \circ q + q \circ p = 0$, soit $q \circ p = -p \circ q$.

De plus, $E = \text{Im } p \oplus \text{ker } p$ et :

- $\forall x \in \text{ker } p, p(x) = 0$ et $(q \circ p)(x) = q(p(x)) = q(0) = 0$.
- $\forall x \in \text{Im } p, p(x) = x$ et $(p \circ q)(x) + (q \circ p)(x) = (p \circ q)(x) + q(x) = 0$.

Alors, en composant par p , on obtient $(p^2 \circ q)(x) + (p \circ q)(x) = 2(p \circ q)(x) = 0$ donc $(p \circ q)(x) = 0$, soit $(q \circ p)(x) = 0$ (car $q \circ p = -p \circ q$).

Ainsi, $\forall x \in E$, on a $(q \circ p)(x) = 0$, soit $q \circ p = 0$. Avec $p \circ q + q \circ p = 0$, on a aussi $p \circ q = 0$.

Finalement, on a bien :

$$p + q \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0.$$

d. Si $p \circ q = q \circ p$, alors $(p \circ q)^2 = (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ donc :

$$p \circ q \text{ est un projecteur.}$$

Dimension finie

Exercice 12

1) Soit $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. On a alors :

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ -b + c = 0 \\ -2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 6a + 2a = 0 \\ b = c \\ c = 2a \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Donc la famille (x_1, x_2, x_3) est libre.

Comme $\dim E = 3$, la famille (x_1, x_2, x_3) est libre et contient 3 vecteurs donc c'est une base E.

On a alors $x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3$, soit :

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ -b + c = -1 \\ -2a + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ b = c + 1 \\ c = 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 6a + 6 + 2a + 1 = 0 \\ b = 2a + 2 \\ c = 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{7}{9}, b = \frac{4}{9} \text{ et } c = -\frac{5}{9}.$$

Donc, les coordonnées de x_4 dans la base (x_1, x_2, x_3) sont $\left(-\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{5}{9}\right)$.

2) La famille (x_1, x_2, x_3, x_4) n'est pas libre car elle contient 4 vecteurs dans un espace de dimension 3.

D'après la question précédente, on a $x_4 = -\frac{7}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3$.

3) Du fait de la première coordonnée non nulle de x_3 (alors que celle de x_4 est nulle), les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc la famille (x_3, x_4) est libre.

Posons $e_1 = (1, 0, 0)$. On a $ae_1 + bx_3 + cx_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b - c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$ donc la famille (e_1, x_3, x_4) est

libre et contient 3 vecteurs : c'est une base de E.

4) Les vecteurs x_1 et x_2 ne sont manifestement pas colinéaires, donc la famille (x_1, x_2) est libre. Alors, $\dim F = 2 = 3 - 1$ donc F est un hyperplan de E .

$$X(x, y, z) \in F \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, X = ax_1 + bx_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = x \\ -b = y \\ -a = z \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y + z = 0 \text{ (avec } a = -z \text{ et } b = -y \text{)}.$$

Une équation de F est donc $x + 3y + z = 0$.

5) Il est clair que $(0, 0, 0) \in G$. De plus, $\forall (X, X') \in G^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, en posant $Y = \lambda X + \mu X'$ et avec $X(x, y, z)$ et $X'(x', y', z')$, on a $x + y = y + z = x' + y' = y' + z' = 0$ et :

$$\begin{cases} x_Y + y_Y = \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda(x + y) + \mu(x' + y') = 0 \\ y_Y + z_Y = \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z' = \lambda(y + z) + \mu(y' + z') = 0 \end{cases}$$

Donc $Y \in G$. Ainsi, G est un sous-espace de E .

$\forall X(x, y, z) \in G$, on a $x + y = y + z = 0$ donc $x = z$ et $y = -x$ donc $X(x, -x, x)$, soit $X = xX_0$ avec $X_0(1, -1, 1)$. Ainsi, G est engendré par un vecteur non nul, X_0 donc (X_0) est une base de G , qui est donc de dimension 1.

6) $\forall X(a, b, c) \in E$, $\forall X'(a', b', c') \in E$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} f(X) &= (a - b)x_1 + (b - c)x_2 + (c - a)x_3 \\ f(X') &= (a' - b')x_1 + (b' - c')x_2 + (c' - a')x_3 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lambda f(X) + \mu f(X') &= \lambda(a - b)x_1 + \lambda(b - c)x_2 + \lambda(c - a)x_3 + \mu(a' - b')x_1 + \mu(b' - c')x_2 + \mu(c' - a')x_3 \\ &= (\lambda a - \lambda b + \mu a' - \mu b')x_1 + (\lambda b - \lambda c + \mu b' - \mu c')x_2 + (\lambda c - \lambda a + \mu c' - \mu a')x_3 \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\lambda X + \mu X'$ a pour coordonnées $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')$ et :

$$f(\lambda X + \mu X') = (\lambda a + \mu a' - \lambda b - \mu b')x_1 + (\lambda b + \mu b' - \lambda c - \mu c')x_2 + (\lambda c + \mu c' - \lambda a - \mu a')x_3.$$

Donc $f(\lambda X + \mu X') = \lambda f(X) + \mu f(X')$ et ainsi, f est linéaire.

Alors :

- Pour $X(a, b, c)$, on a $f(X) = 0 \Leftrightarrow (a - b)x_1 + (b - c)x_2 + (c - a)x_3 = 0$.

Or, on a vu que (x_1, x_2, x_3) est libre donc $f(X) = 0 \Leftrightarrow a - b = b - c = c - a = 0 \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow X = ax_3$.

Donc, $\ker f = \text{Vect}(x_3)$.

- Comme $\dim E = 3$ et $\dim \ker f = 1$, le théorème du rang permet de conclure que $\text{rg}(f) = 2$.

- On a $f(X) = (a - b)(x_1 - x_3) + (b - c)(x_2 - x_3) \in \text{Vect}(x_1 - x_3, x_2 - x_3)$ donc $\text{Im} f \subset \text{Vect}(x_1 - x_3, x_2 - x_3)$

Réciproquement, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha(x_1 - x_3) + \beta(x_2 - x_3) = \alpha x_1 + \beta x_2 - (\alpha + \beta)x_3 = f(X)$ avec $X(\alpha, 0, -\beta)$ donc $\text{Vect}(x_1 - x_3, x_2 - x_3) \subset \text{Im} f$.

Ainsi, $\text{Im} f = \text{Vect}(x_1 - x_3, x_2 - x_3)$.

Exercice 13

a) Montrons que $F \cup G = E$ implique $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, alors il existe $x_1 \in F$ tel que $x_1 \notin G$ et $x_2 \in G$ tel que $x_2 \notin F$.

Alors, $x_1 \in F \cup G$ et $x_2 \in F \cup G$ donc $x_1 + x_2 \in F \cup G$ car $F \cup G = E$ est un espace vectoriel.

Donc, soit $x_1 + x_2 \in F$, ce qui est absurde car dans ce cas, $x_2 = x_1 + x_2 - x_1 \in F$, soit $x_1 + x_2 \in G$, ce qui est aussi absurde car dans ce cas, $x_1 = x_1 + x_2 - x_2 \in G$. Ainsi, l'hypothèse $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ amène à une absurdité donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Mais alors, si $F \cup G = E$, on a soit $F \subset G$ et $F \cup G = G = E$, ce qui contredit l'hypothèse $G \neq E$, soit $G \subset F$ et $F \cup G = F = E$, ce qui contredit l'hypothèse $F \neq E$. Ainsi, l'hypothèse $F \cup G = E$ amène à une absurdité donc :

$$F \cup G \neq E$$

b) D'après ce qui précède, $F \cup G \neq E$ donc il existe $x_0 \in E \setminus (F \cup G)$ (ce qui implique entre autres que $x_0 \neq 0$).

On a alors $\mathbb{R}x_0 \cap F = \{0\}$ car sinon, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda x_0 \in F$ et donc $x_0 = (\lambda x_0) / \lambda \in F$ ce qui est absurde. De même, $\mathbb{R}x_0 \cap G = \{0\}$.

Comme F est un hyperplan, on a $\dim F = n - 1$ donc $\dim(\mathbb{R}x_0 \oplus F) = 1 + n - 1 = n = \dim E$ et ainsi, $\mathbb{R}x_0 \oplus F = E$.

De même, $\mathbb{R}x_0 \oplus G = E$ et ainsi :

F et G possèdent un supplémentaire commun dans E.

c) On veut : F et G admettent un supplémentaire commun $\Leftrightarrow \dim F = \dim G$.

(\Rightarrow) Supposons que F et G admettent un supplémentaire commun H .

On a $H \oplus F = H \oplus G = E$ donc $\dim H + \dim F = \dim H + \dim G = \dim E$, ce qui implique que $\dim F = \dim G$.

(\Leftarrow) Supposons que $\dim F = \dim G = p$ avec $0 \leq p \leq n - 1$.

Prouvons alors par récurrence descendante sur p que F et G admettent un supplémentaire commun.

Initialisation : Pour $p = n - 1$, F et G sont des hyperplans de E donc ils admettent un supplémentaire commun d'après la question précédente. Ainsi, la propriété est initialisée.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $p + 1$ avec $0 \leq p \leq n - 2$.

Alors, $\dim F = \dim G = p \leq n - 2$ et d'après la question a), $F \cup G \neq E$ donc il $x_0 \in E \setminus (F \cup G)$.

On montre comme dans la question précédente que $\mathbb{R}x_0 \cap F = \mathbb{R}x_0 \cap G = \{0\}$. Alors $F' = \mathbb{R}x_0 \oplus F$ et $G' = \mathbb{R}x_0 \oplus G$ sont deux sous-espaces de E de dimension $p + 1$, donc, par hypothèse de récurrence, ils admettent un supplémentaire commun H' . Alors, on a :

$$E = F' \oplus H' = G' \oplus H' = F \oplus \mathbb{R}x_0 \oplus H' = G \oplus \mathbb{R}x_0 \oplus H' = F \oplus H = G \oplus H \text{ avec } H = \mathbb{R}x_0 \oplus H'.$$

Ainsi, F et G admettent un supplémentaire commun H donc la propriété est héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie pour tout $p \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.

Finalement, on a bien :

F et G admettent un supplémentaire commun $\Leftrightarrow \dim F = \dim G$.

Exercice 14

Certaines implications sont évidentes : (ii) \Rightarrow (i), (iii) \Rightarrow (iv) et (vi) \Rightarrow (v).

Par le théorème du rang, on a $\text{rg}(f^2) + \dim(\ker f^2) = \text{rg}(f) + \dim(\ker f) = n$. Ceci implique que (i) \Leftrightarrow (iv).

De plus, il est clair que, quelle que soit f , $\text{Im} f^2 \subset \text{Im} f$ et $\ker f \subset \ker f^2$. Or, si deux s.e.v. ont la même dimension et que l'un est inclus dans l'autre, alors ils sont égaux donc : (i) \Rightarrow (ii) et (iv) \Rightarrow (iii).

De plus, si $\text{Im} f \cap \ker f = \{0\}$, on peut écrire $\text{Im} f \oplus \ker f \subset E$ et, à nouveau par le théorème du rang, on a $\text{rg}(f) + \dim(\ker f) = \dim E$ donc $\text{Im} f \oplus \ker f = E$ et ainsi, (v) \Rightarrow (vi).

Ainsi, on a (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) et (v) \Leftrightarrow (vi).

Supposons maintenant que $\text{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.

On a vu que l'on déjà $\ker f \subset \ker f^2$ et $\forall x \in \ker f^2$, on a $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \ker f$. Or, $f(x) \in \text{Im} f$ donc $f(x) \in \text{Im} f \cap \ker f = \{0\}$, soit $f(x) = 0$ ou $x \in \ker f$. Ainsi, $\ker f^2 \subset \ker f$ et donc $\ker f^2 = \ker f$. Ceci prouve que (v) \Rightarrow (iii).

Supposons enfin que $\ker f^2 = \ker f$. $\forall x \in \text{Im} f \cap \ker f$, on a $f(x) = 0$ et $\exists z \in E$ tel que $x = f(z)$. Alors, $f(x) = f^2(z) = 0$ donc $z \in \ker f^2 = \ker f$ et $x = f(z) = 0$. Ainsi, $\text{Im} f \cap \ker f = \{0\}$. Ceci prouve que (iii) \Rightarrow (v).

Finalement, on a bien :

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$$

Exercice 15

a) On a $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im} v$ donc $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(v)$.

De plus, $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ donc $\dim(\ker u) \leq \dim(\ker(v \circ u))$, soit $n - \dim(\ker(v \circ u)) \leq n - \dim(\ker u)$.

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(u) = n - \dim(\ker u)$ et $\text{rg}(v \circ u) = n - \dim(\ker(v \circ u))$ donc $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(u)$.

Ainsi, on a $\text{rg}(v \circ u) \leq \inf(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

Par ailleurs, posons $\tilde{v} = v|_{\text{Im} u}$. On a $\text{Im} \tilde{v} = \text{Im}(v \circ u)$ et le théorème du rang donne :

$$\text{rg}(\tilde{v}) + \dim(\ker \tilde{v}) = \dim(\text{Im} u) \Leftrightarrow \dim(\ker \tilde{v}) = \text{rg}(u) - \text{rg}(v \circ u).$$

Or, $\ker \tilde{v} \subset \ker v$ donc $\dim(\ker \tilde{v}) \leq \dim(\ker v) = n - \text{rg}(v)$ donc :

$$\text{rg}(u) - \text{rg}(v \circ u) \leq n - \text{rg}(v) \Leftrightarrow \underline{\text{rg}(u) + \text{rg}(v) - n \leq \text{rg}(v \circ u)}.$$

Finalement :

$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) - n \leq \text{rg}(v \circ u) \leq \inf(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$$

b) Supposons que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \text{GL}(E)$.

- Remarquons que dans la question précédente, on aurait pu intervertir u et v donc, quels que soient u et v , on a aussi $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) - n \leq \text{rg}(u \circ v)$. On a alors ici $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) - n \leq 0 \Rightarrow \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$.

Or, $u + v \in \text{GL}(E)$ donc $\text{rg}(u + v) = n$. Mais $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im} u + \text{Im} v$ donc :

$$n = \text{rg}(u + v) \leq \dim(\text{Im} u + \text{Im} v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) - \dim(\text{Im} u \cap \text{Im} v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n.$$

Ainsi :

$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$$

Ce qui précède donne aussi $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) = 0$ donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$.

- Or, l'hypothèse $u \circ v = 0$ donne immédiatement $\operatorname{Im} v \subset \ker u$.

Or, $\dim(\operatorname{Im} v) = \operatorname{rg}(v)$ et $\dim(\ker u) = n - \operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v)$ donc $\operatorname{Im} v$ et $\ker u$ ont la même dimension et ainsi :

$$\operatorname{Im} v = \ker u$$

- Avec $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0\}$ et $\operatorname{Im} v = \ker u$, on a $\operatorname{Im} u \cap \ker u = \{0\}$ donc $\operatorname{Im} u + \ker u = \operatorname{Im} u \oplus \ker u$.

Enfin, $\dim(\operatorname{Im} u \oplus \ker u) = \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\ker u) = n = \dim E$ donc :

$$\operatorname{Im} u \oplus \ker u = E$$

Exercice 16

Remarquons déjà que quels que soient f et g , on a :

- $\forall x \in \operatorname{Im}(f + g)$, on a $x = (f + g)(z) = f(z) + g(z) \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$ donc $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et :

$$\operatorname{rg}(f + g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \Rightarrow \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g).$$

Soit :

$$\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f + g) \quad (1)$$

- $\forall x \in \ker f \cap \ker g$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker(f + g)$ donc $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f + g)$ et :

$$\dim(\ker f \cap \ker g) \leq \dim(\ker(f + g)).$$

Or :

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\ker f + \ker g) = 2n - \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) - \dim(\ker f + \ker g).$$

Donc :

$$2n - \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) - \dim(\ker f + \ker g) \leq \dim(\ker(f + g)) = n - \operatorname{rg}(f + g)$$

$$\operatorname{rg}(f + g) - \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) + n \leq \dim(\ker f + \ker g) \quad (2)$$

(\Rightarrow) Supposons que $\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

- (1) devient $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leq 0$, soit $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = 0$ et donc :

$$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}.$$

- (2) devient $n \leq \dim(\ker f + \ker g)$, soit $\dim(\ker f + \ker g) = n$ (car $\ker f + \ker g \subset E$) et donc :

$$\ker f + \ker g = E.$$

(\Leftarrow) Supposons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$ et $\ker f + \ker g = E$.

$\forall x \in \ker(f + g)$, on a $f(x) + g(x) = 0$ donc $f(x) = -g(x) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$.

Ainsi, $f(x) = g(x) = 0$ donc $x \in \ker f \cap \ker g$.

Alors $\ker(f + g) \subset \ker f \cap \ker g$. Or, on a vu que l'on a toujours, $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f + g)$ donc :

$$\ker f \cap \ker g = \ker(f + g).$$

En passant aux dimensions comme plus haut, on obtient :

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = 2n - \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) - \dim(\ker f + \ker g) = \dim(\ker(f + g)).$$

Et avec $\ker f + \ker g = E$, on a $n - \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) = \dim(\ker(f + g)) = n - \operatorname{rg}(f + g)$, soit :

$$\underline{\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)}.$$

Finalement, on a bien :

$$\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\} \\ \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g = E \end{cases}$$

Exercice 17

S'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = \ker f$, alors le théorème du rang donne $\operatorname{rg}(f) + \dim(\ker f) = 2\operatorname{rg}(f) = n$ et donc n est pair.

Réciproquement, si n est pair, alors on peut écrire $n = 2p$ avec p entier.

Soit alors $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ une base E et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f(e_i) = e_{p+i}$ et $f(e_{p+i}) = 0$. Il est alors clair que $\operatorname{Im} f = \ker f = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_{2p})$. Ainsi, si n est pair, on peut construire $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\operatorname{Im} f = \ker f$.

Finalement :

$$\text{Il existe } f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \operatorname{Im} f = \ker f \Leftrightarrow E \text{ est de dimension paire.}$$

Exercice 18

S'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \ker f$, alors $\dim F + \dim G = \operatorname{rg}(f) + \dim(\ker f) = n$.

Réciproquement, si $\dim F + \dim G = n$, soient (e_1, \dots, e_p) une base de G avec $\dim G = p$ complétée par $n - p$ vecteurs (e_{p+1}, \dots, e_n) en une base de E et (f_1, \dots, f_{n-p}) une base de F (de dimension $n - \dim G = n - p$).

Soit alors $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f(e_i) = 0$ et $\forall i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $f(e_i) = f_{i-p}$.

Par construction, on a clairement $G = \ker f$ et $F = \operatorname{Im} f$ donc si $\dim F + \dim G = n$, on peut construire $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $G = \ker f$ et $F = \operatorname{Im} f$.

Finalement :

$$\text{Il existe } f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } G = \ker f \text{ et } F = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \dim F + \dim G = n.$$

Exercice 19

Remarquons déjà que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$.

En effet, si $x \in \operatorname{Im} u^{k+1}$, il existe $z \in E$ tel que $x = u^{k+1}(z)$. Mais alors, $x = u^k(u(z)) \in \operatorname{Im} u^k$.

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rg}(u^{k+1}) \leq \operatorname{rg}(u^k)$ donc la suite $(\operatorname{rg}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'entiers naturels donc elle est stationnaire.

Posons alors $p = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i \geq k, \operatorname{rg}(u^{i+1}) = \operatorname{rg}(u^i)\}$.

Si, pour un entier k donné, on a $\operatorname{rg}(u^{k+1}) = \operatorname{rg}(u^k)$, alors $\operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k$.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $\text{Im } u^{k+i} = f^i(\text{Im } u^k) = f^i(\text{Im } u^{k+1}) = \text{Im } u^{k+i+1}$ et donc la suite $(\text{rg}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire au moins à partir du rang k et ainsi, $k \geq p$.

Ceci implique que $\forall k < p$, $\text{rg}(u^{k+1}) < \text{rg}(u^k)$ et donc que la suite $(\text{rg}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ prend $p+1$ valeurs distinctes.

Or, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\text{Im } u^k \subset E$ donc $\text{rg}(u^k) \leq n$ et ainsi, $(\text{rg}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ prend au maximum $n+1$ valeurs (entre 0 et n).

Ainsi, $p+1 \leq n+1$ soit $p \leq n$ et donc $n \in \{k \in \mathbb{N} \mid \forall i \geq k, \text{rg}(u^{i+1}) = \text{rg}(u^i)\}$, soit :

$$\boxed{\text{rg}(u^n) = \text{rg}(u^{n+1})}$$

Exercice 20

Si $E = \ker f + \ker g = \text{Im } f + \text{Im } g$, on a :

$$n = \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\ker f \cap \ker g) = 2n - \text{rg}(f) - \text{rg}(g) - \dim(\ker f \cap \ker g)$$

$$n = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

Donc :

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - \text{rg}(f) - \text{rg}(g)$$

$$\dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n$$

Ainsi :

$$\dim(\ker f \cap \ker g) + \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0.$$

Or, $\dim(\ker f \cap \ker g)$ et $\dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$ sont des entiers naturels donc, l'égalité ci-dessus implique que :

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0.$$

Alors $\ker f \cap \ker g = \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$ et donc :

$$\boxed{E = \ker f \oplus \ker g = \text{Im } f \oplus \text{Im } g}$$

Soit f un projecteur de E . On a $E = \ker f \oplus \text{Im } f$. L'application $g = \text{Id} - f$ est aussi un projecteur de E avec $E = \ker g \oplus \text{Im } g$. Mais $\text{Im } g = \ker f$ et $\ker g = \text{Im } f$ et on a alors $E = \ker f \oplus \ker g = \text{Im } f \oplus \text{Im } g$.

Exercice 21

Remarquons que $\dim(\text{Im } f + \ker f) = \text{rg}(f) + \dim(\ker f) - \dim(\text{Im } f \cap \ker f) = \dim E - \dim(\text{Im } f \cap \ker f)$, donc :

$$\text{Im } f \cap \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\text{Im } f + \ker f) = \dim E \Leftrightarrow \text{Im } f \oplus \ker f = E.$$

De plus, $f(\ker f) = \{0\} \subset \ker f$ donc $\ker f$ est stable par f .

Ainsi, si $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$, $\text{Im } f$ admet un supplémentaire dans E stable par f : $\ker f$.

Réciproquement, supposons que $\text{Im } f$ admet un supplémentaire dans E stable par f , noté F .

On a alors $\text{Im } f \cap F = \{0\}$ et $f(F) \subset F$. Mais $f(F) \subset \text{Im } f$ donc $f(F) \subset \text{Im } f \cap F = \{0\}$. Ainsi, $f(F) = \{0\}$ donc :

$$F \subset \ker f.$$

Or, si $\text{Im } f \oplus F = E$, on a $\dim(\text{Im } f) + \dim F = \text{rg}(f) + \dim F = \dim E = \text{rg}(f) + \dim(\ker f)$ donc :

$$\dim F = \dim(\ker f).$$

Ainsi, $F = \ker f$ et donc $\text{Im } f \cap F = \text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$.

Finalement :

$\text{Im } f$ admet un supplémentaire dans E stable par f si et seulement si $\text{Im } f \cap \ker f = \{0\}$ et ce supplémentaire est $\ker f$ donc unique.

Exercice 22

Remarquons préalablement que si f et g sont deux endomorphismes quelconques de E , on a $\text{Im}(f \circ g) = f(\text{Im } g)$ et $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im } f)$. Si de plus $g \in \text{GL}(E)$, on a $\text{Im } g = E$ donc :

$$\text{Im}(f \circ g) = f(E) = \text{Im } f \quad \text{et} \quad \dim[\text{Im}(g \circ f)] = \dim[g(\text{Im } f)] = \dim(\text{Im } f).$$

Ce qui implique que :

$$\underline{g \in \text{GL}(E) \Rightarrow \text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)}.$$

Si p et q sont des projecteurs, on a $p^2 = p$, $q^2 = q$ et en posant $r = \text{Id} - p - q \in \text{GL}(E)$, on peut écrire :

- $rp = (\text{Id} - p - q)p = p - p^2 - qp = -qp \Rightarrow \text{rg}(p) = \text{rg}(rp) = \text{rg}(qp)$;
- $pr = p(\text{Id} - p - q) = p - p^2 - pq = -pq \Rightarrow \text{rg}(p) = \text{rg}(pr) = \text{rg}(pq)$;
- $rq = (\text{Id} - p - q)q = q - pq - q^2 = -pq \Rightarrow \text{rg}(q) = \text{rg}(rq) = \text{rg}(pq)$;
- $qr = q(\text{Id} - p - q) = q - qp - q^2 = -qp \Rightarrow \text{rg}(q) = \text{rg}(qr) = \text{rg}(qp)$;
- $rpr = (rp)r = (-qp)r = q(-pr) = qpq \Rightarrow \text{rg}(qpq) = \text{rg}(rpr) = \text{rg}(rp) = \text{rg}(p)$;
- $rqr = (rq)r = (-pq)r = p(-qr) = pqp \Rightarrow \text{rg}(pqp) = \text{rg}(rqr) = \text{rg}(rq) = \text{rg}(q)$.

Finalement, on obtient :

$$\text{rg}(p) = \text{rg}(q) = \text{rg}(pq) = \text{rg}(qp) = \text{rg}(qpq) = \text{rg}(pqp)$$

Exercice 23

Remarque préalable pour mieux visualiser la situation : Si on se place dans l'espace affine usuel à trois dimensions et si F et G sont deux droites non coplanaires ou strictement parallèles, l'exercice dit (entre autres) que l'on peut les placer respectivement dans deux plans strictement parallèles.

Posons $F = A + \vec{F}$ et $G = B + \vec{G}$ où \vec{F} et \vec{G} les directions respectives de F et G .

$\vec{H} = \vec{F} + \vec{G}$ est un sous-espace vectoriel de \vec{E} . Posons alors $F' = A + \vec{H}$ et $G' = B + \vec{H}$.

- F' et G' ont la même direction : \vec{H} donc $\underline{F' \parallel G'}$.
- Comme $\vec{F} \subset \vec{H}$ et $A \in F$, on a $\underline{F \subset F'}$. De même, $\vec{G} \subset \vec{H}$ et $B \in G$, on a $\underline{G \subset G'}$.
- Supposons que $F' \cap G' \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe $C \in F' \cap G'$. Alors :
 - $C \in F' \Leftrightarrow \overline{AC} \in \vec{H} \Leftrightarrow \overline{AC} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ avec $(\vec{u}_F, \vec{u}_G) \in \vec{F} \times \vec{G}$.
 - $C \in G' \Leftrightarrow \overline{BC} \in \vec{G} \Leftrightarrow \overline{BC} = \vec{v}_F + \vec{v}_G$ avec $(\vec{v}_F, \vec{v}_G) \in \vec{F} \times \vec{G}$.

On a alors $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = \vec{u}_F - \vec{v}_F + \vec{u}_G - \vec{v}_G$. Or, $\vec{u}_F - \vec{v}_F \in \vec{F}$ donc il existe $C' \in F$ tel que $\overline{AC'} = \vec{u}_F - \vec{v}_F$.

Alors, $\overline{BC'} = \overline{AC'} - \overline{AB} = \vec{v}_G - \vec{u}_G \in \vec{G}$ ce qui implique que $C' \in G$.

Ainsi, $C' \in F$ et $C' \in G$, ce qui est absurde car $F \cap G = \emptyset$ et donc $\underline{F' \cap G' = \emptyset}$.

Exercice 24

Remarque préalable pour mieux visualiser la situation : Si on se place dans l'espace affine usuel à trois dimensions et si F et G sont deux droites, le sous-espace affine engendré par $F \cup G$ est soit le plan contenant les deux droites (de dimension 2) si elles sont coplanaires, soit l'espace tout entier (de dimension 3) si elles ne sont pas coplanaires.

Soient \vec{F} , \vec{G} et \vec{H} les directions respectives de F , G et H .

Soit $A \in F$. $\forall \vec{u} \in \vec{F}$, on a $A + \vec{u} \in F$. Or, $F \subset F \cup G \subset H$ donc $A \in H$ et $A + \vec{u} \in H$ et $\vec{u} \in \vec{H}$. Ainsi, $\vec{F} \subset \vec{H}$.

On montre de la même façon que $\vec{G} \subset \vec{H}$ et comme \vec{F} , \vec{G} et \vec{H} sont des espaces vectoriels, on a :

$$\underline{\vec{F} + \vec{G} \subset \vec{H}}.$$

Considérons alors deux cas :

- Si $F \cap G \neq \emptyset$, soit $A \in F \cap G$.

Posons $\vec{K} = \vec{F} + \vec{G}$ et $K = A + \vec{F} + \vec{G}$.

D'après ce qui précède, $\vec{K} \subset \vec{H}$ donc $K \subset H$.

De plus :

- $\forall M \in F$, $\overline{AM} \in \vec{F} \subset \vec{K}$ donc $M = A + \overline{AM} \in K$. Ainsi, $F \subset K$.
- De la même façon, on a $G \subset K$.

Alors, $F \cup G \subset K \subset H$ et comme H est le plus petit sous-espace affine contenant $F \cup G$, on a $K = H$ et :

$$\dim H = \dim \vec{K} = \dim(\vec{F} + \vec{G}).$$

- Si $F \cap G = \emptyset$, soient $A \in F$ et $B \in G$.

Remarquons que $\overline{AB} \neq \vec{0}$ et si $\overline{AB} \in \vec{F} + \vec{G}$, on peut écrire $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{BN}$ avec $(M, N) \in F \times G$, soit $\overline{BM} = \overline{NB}$ et donc $B \in F$, ce qui est absurde donc $\overline{AB} \notin \vec{F} + \vec{G}$ et ainsi, $(\vec{F} + \vec{G}) \cap \text{Vect}(\overline{AB}) = \{\vec{0}\}$.

Posons alors $\vec{K} = (\vec{F} + \vec{G}) \oplus \text{Vect}(\overline{AB})$ et $K = A + \vec{K}$.

On a $\vec{F} + \vec{G} \subset \vec{H}$ et $(A, B) \in (F \cup G)^2$ donc $\overline{AB} \in \vec{H}$. Alors, $\vec{K} \subset \vec{H}$ et donc $K \subset H$.

De plus :

- $\forall M \in F$, $\overline{AM} \in \vec{F} \subset \vec{K}$ donc $M \in K$. Ainsi, $F \subset K$.
- $\forall M \in G$, $\overline{BM} \in \vec{G}$ donc $\overline{AM} = \overline{BM} + \overline{AB} \in \vec{K}$ et $M \in K$. Ainsi, $G \subset K$.

Alors, $F \cup G \subset K \subset H$ et comme H est le plus petit sous-espace affine contenant $F \cup G$, on a $K = H$ et :

$$\dim H = \dim \vec{K} = \dim(\vec{F} + \vec{G}) + \dim \text{Vect}(\overline{AB}) = \dim(\vec{F} + \vec{G}) + 1.$$

Finalemment :

Si $F \cap G \neq \emptyset$, $\dim H = \dim(\vec{F} + \vec{G})$ et si $F \cap G = \emptyset$, $\dim H = \dim(\vec{F} + \vec{G}) + 1$.

Exercice 25

Remarque préalable pour mieux visualiser la situation : Si on se place dans l'espace affine usuel à trois dimensions et si F et G sont deux droites strictement parallèles (de dimension $p = m = 1$), elles sont incluses

dans un plan (de dimension $m+1=2$) ; si F est une droite (de dimension $p=1$) strictement parallèle à un plan G (de dimension $m=2$), elles sont incluses dans l'espace entier (de dimension $m+1=3$).

Soient F et G , deux sous-espaces affines tels que $F \cap G = \emptyset$ avec $\dim F = p$, $\dim G = m$ et $p \leq m$. On veut :

« F est parallèle à G » \Leftrightarrow « il existe un sous-espace affine H de dimension $m+1$ contenant F et G ».

Appelons \vec{F} et \vec{G} les directions respectives de F et G et soient $A \in F$ et $B \in G$.

On a $\overline{AB} \notin \vec{G}$, car sinon, on aurait $A = B - \overline{AB} \in G$, qui est absurde car $F \cap G = \emptyset$.

(\Rightarrow) Supposons que F est parallèle à G , soit $\vec{F} \subset \vec{G}$.

Posons alors $\vec{H} = \vec{G} \oplus \text{Vect}(\overline{AB})$ et $H = A + \vec{H}$. On a $\dim H = \dim \vec{H} = \dim \vec{G} + \dim \text{Vect}(\overline{AB}) = m+1$ et :

- $\forall M \in F$, $\overline{AM} \in \vec{F} \subset \vec{G} \subset \vec{H}$ donc $M \in H$. Ainsi, $F \subset H$.
- $\forall M \in G$, $\overline{BM} \in \vec{G}$ donc $\overline{AM} = \overline{BM} + \overline{AB} \in \vec{H}$ et $M \in H$. Ainsi, $G \subset H$.

Finalemment :

$$\dim H = m+1 \text{ et } H \text{ contient } F \text{ et } G.$$

(\Leftarrow) Supposons qu'il existe un sous-espace affine H de dimension $m+1$ et de direction \vec{H} , contenant F et G .

Comme H contient G , on a $\vec{G} \subset \vec{H}$ et comme $\dim \vec{H} = \dim \vec{G} + 1$ et $\overline{AB} \notin \vec{G}$, on peut écrire $\vec{H} = \vec{G} \oplus \text{Vect}(\overline{AB})$.

Comme H contient F , on a $\vec{F} \subset \vec{H}$ donc $\forall \vec{x} \in \vec{F}$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{x}_G + \lambda \overline{AB}$ avec $\vec{x}_G \in \vec{G}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Supposons que $\lambda \neq 0$. Alors $\frac{1}{\lambda} \vec{x}_G \in \vec{G}$, donc $N = B + \frac{1}{\lambda} \vec{x}_G \in G$ et $\vec{x}_G = \lambda \overline{BN}$. D'où :

$$\vec{x} = \vec{x}_G + \lambda \overline{AB} = \lambda \overline{BN} + \lambda \overline{AB} = \lambda \overline{AN} \Leftrightarrow N = A + \frac{1}{\lambda} \vec{x}.$$

Comme $\frac{1}{\lambda} \vec{x} \in \vec{F}$, on a $N \in F$, ce qui est absurde car $N \in G$ et $F \cap G = \emptyset$.

Ainsi, $\lambda = 0$ et donc $\vec{x} = \vec{x}_G \in \vec{G}$. Ceci prouve que $\forall \vec{x} \in \vec{F}$, $\vec{x} \in \vec{G}$ donc que $\vec{F} \subset \vec{G}$ et ainsi que :

$$F \text{ est parallèle à } G.$$

