

## Corrigés des TD du Chapitre 14

### Exercice 1

Soit  $x \in I$  :

- Si  $f(x) < x$ , alors en appliquant  $f$ , qui est croissante, on a  $f \circ f(x) \leq f(x)$ . Mais  $f \circ f(x) = x$  donc  $x \leq f(x)$ , ce qui est absurde.
- De la même façon, on arrive à une absurdité si  $f(x) > x$ .

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in I, f(x) = x}$$

### Exercice 2

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ . Comme  $f \circ f \circ f$  est strictement décroissante, on a  $f \circ f \circ f(a) > f \circ f \circ f(b)$ .

Supposons que  $f(a) \leq f(b)$ . En appliquant  $f \circ f$ , qui est croissante, on obtient  $f \circ f(f(a)) \leq f \circ f(f(b))$ , soit  $f \circ f \circ f(a) \leq f \circ f \circ f(b)$ , ce qui est absurde. Donc,  $f(a) > f(b)$  et ainsi :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante.}}$$

### Exercice 3

Remarquons déjà que pour  $k$  réel quelconque, les fonctions  $x \mapsto x + k$  et  $x \mapsto -x + k$  sont clairement solutions du problème.

Réciproquement, soit  $f$  une solution du problème. On a  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$  et, en particulier pour  $y = 0$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(0)| = |x|$ , soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + f(0) \text{ ou } f(x) = -x + f(0).$$

Supposons maintenant qu'il existe  $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$  tel que  $f(x) = x + f(0)$  et  $f(y) = -y + f(0)$ .

On a alors  $|f(x) - f(y)| = |x + f(0) + y - f(0)| = |x + y| = |x - y|$ .

En élevant au carré, on obtient  $(x + y)^2 = (x - y)^2$ , ce qui donne  $xy = 0$ . Ceci est absurde car on a supposé  $x$  et  $y$  non nuls. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x + f(0) \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = -x + f(0).$$

Les relations précédentes étant toutes deux vraies pour  $x = 0$ , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + f(0) \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = -x + f(0).$$

Finalement,  $f$  est de la forme  $x \mapsto x + k$  et  $x \mapsto -x + k$  (avec  $k = f(0)$ ).

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les solutions du problème sont les fonctions de la forme } x \mapsto x + k \text{ et } x \mapsto -x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R} .}$$

**Exercice 4**

Il est clair que la fonction identité  $x \mapsto x$  est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ .

Par contre, le produit de cette fonction par elle-même, qui est la fonction carré  $x \mapsto x^2$ , n'est pas lipschitzienne. En effet,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $|x^2 - y^2| = |x + y||x - y|$  et la quantité  $|x + y|$  n'est pas bornée quand  $(x, y)$  décrit  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi :

Le produit de deux fonctions lipschitziennes n'est pas forcément lipschitzien.

Vue la façon dont est présenté l'exercice, on pouvait supposer ce résultat et chercher immédiatement un contre-exemple. De même, l'énoncé laisse penser que si les fonctions sont bornées, la réponse sera affirmative.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions bornées sur un intervalle  $I$  et respectivement  $k$ -lipschitzienne et  $k'$ -lipschitzienne sur ce même intervalle. Soient  $M$  et  $M'$  des réels positifs tels que  $\forall x \in I$ ,  $|f(x)| \leq M$  et  $|g(x)| \leq M'$ .

$\forall (x, y) \in I^2$ , on a alors :

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| = |(f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y))|.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a alors :

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x) - f(y)| |g(x)| + |f(y)| |g(x) - g(y)|.$$

Avec  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ ,  $|g(x) - g(y)| \leq k'|x - y|$ ,  $|f(x)| \leq M$  et  $|g(x)| \leq M'$ , on obtient :

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M'k|x - y| + Mk'|x - y| \Rightarrow |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq K|x - y|$$

avec  $K = M'k + Mk'$ .

Ainsi :

Le produit de deux fonctions lipschitziennes et bornées est lipschitzien.

**Exercice 5**

$\forall x \in ]0;1]$ , on a  $|1 - x| = 1 - x < 1$  et  $\left| \sin \frac{\pi}{x} \right| \leq 1$  donc  $|f(x)| \leq 1$ .

Ceci prouve que  $f$  est bornée avec  $\sup_{x \in ]0;1]} f(x) \leq 1$  et  $\inf_{x \in ]0;1]} f(x) \geq -1$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $a_n = \frac{2}{4n+1}$  et  $b_n = \frac{2}{4n+3}$ .

On a alors,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

- $a_n \in ]0;1]$  et  $f(a_n) = \left(1 - \frac{2}{4n+1}\right) \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1 - \frac{2}{4n+1}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 1$  et ainsi,  $\sup_{x \in ]0;1]} f(x) = 1$ .
- $b_n \in ]0;1]$  et  $f(b_n) = \left(1 - \frac{2}{4n+3}\right) \sin \frac{(4n+3)\pi}{2} = -1 + \frac{2}{4n+3}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = -1$  et ainsi,  $\inf_{x \in ]0;1]} f(x) = -1$ .

Finalement :

$f$  est bornée avec  $\sup_{]0;1]} f = 1$  et  $\inf_{]0;1]} f = -1$ .

**Exercice 6**

On a  $E \subset [0;1]$  donc  $E$  est majorée par 1.

Comme  $f$  est à images dans  $[0;1]$ , on a  $\forall x \in [0;1], f(x) \geq 0$ . En particulier pour  $x = 0, f(0) \geq 0$  donc  $0 \in E$  et ainsi,  $E$  est non vide.

Alors,  $E$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée donc elle admet une borne supérieure  $\alpha$ .

Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ . Alors, avec  $f$  croissante, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \in E \Rightarrow u_n \leq \alpha \Rightarrow f(u_n) \leq f(\alpha) \\ u_n \in E \Rightarrow f(u_n) \geq u_n \end{array} \right\} \Rightarrow u_n \leq f(\alpha) \text{ et en passant à la limite, on obtient } \underline{\alpha \leq f(\alpha)}.$$

Alors :

- Si  $\alpha = 1$ , on a  $f(1) \leq 1$  (car  $f$  est à images dans  $[0;1]$ ), soit  $f(\alpha) \leq \alpha$ .
- Si  $\alpha < 1$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $v_n = \alpha + \frac{1-\alpha}{n}$ . On a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha < v_n \leq 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$  et :

$$\left. \begin{array}{l} v_n > \alpha \Rightarrow f(v_n) \geq f(\alpha) \\ v_n > \alpha \Rightarrow v_n \notin E \Rightarrow f(v_n) < v_n \end{array} \right\} \Rightarrow f(\alpha) < v_n \text{ et en passant à la limite, on obtient } \underline{f(\alpha) \leq \alpha}.$$

Avec  $\alpha \leq f(\alpha)$ , on obtient dans les deux cas  $\underline{f(\alpha) = \alpha}$  et ainsi :

$E$  admet une borne supérieure qui est un point fixe de  $f$ .

**Exercice 7**

$\forall x > 0$ , on a  $\frac{x}{b} - 1 < E\left(\frac{x}{b}\right) \leq \frac{x}{b}$  et  $\frac{a}{x} > 0$  donc  $\frac{a}{x} \left(\frac{x}{b} - 1\right) < f(x) \leq \frac{a}{x} \frac{x}{b}$ , soit  $\frac{a}{b} - \frac{a}{x} < f(x) \leq \frac{a}{b}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{x}\right) = \frac{a}{b}$ , le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{b}$$

$\forall x \in [0; b[$ , on a  $0 \leq \frac{x}{b} < 1$  donc  $E\left(\frac{x}{b}\right) = 0$  et  $\forall x \in [0; b[$ ,  $f(x) = 0$ . Ceci permet de conclure immédiatement que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$\forall x \in [-b; 0[$ , on a  $-1 \leq \frac{x}{b} < 0$  donc  $E\left(\frac{x}{b}\right) = -1$  et  $\forall x \in [-b; 0[$ ,  $f(x) = -\frac{a}{x}$ . Avec  $a > 0$ , on peut conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

**Exercice 8**

Remarquons que la fonction  $f$  est dérivable (donc continue) sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que un produit de telles fonctions.

De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $|f(x)| \leq x^2$  donc, par le théorème des gendarmes,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

Alors,  $\forall h \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+h) = f(h)$  (par continuité de  $f$  en  $h$ ) donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ .

Or,  $\forall h \in \mathbb{R}^*$ , on a  $\left| h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right| \leq |h|$  donc, par le théorème des gendarmes,  $\lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$  et ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = 0$$

Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ .

Et sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Or, on a vu plus haut que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , mais quand  $x \rightarrow 0$ ,  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \text{ n'existe pas.}$$

Comme quoi, on ne peut pas intervertir des limites n'importe comment... Vous verrez en 2<sup>ème</sup> année.

**Exercice 9**

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$  si et seulement si  $\forall A > 0$ ,  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \geq x_0$ ,  $|f(x)| > A$ .

Supposons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| \neq +\infty$ . Alors,  $\exists A > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\exists x_0 \geq x$  tel que  $|f(x_0)| \leq A$ .

En posant  $B = [-A; A]$ , ce qui précède se reformule en :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\exists x_0 \geq x$  tel que  $f(x_0) \in B$  ou encore en :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x_0 \geq x \text{ tel que } x_0 \in f^{-1}(B).$$

Le «  $\forall x \in \mathbb{R}$  » implique alors que  $f^{-1}(B)$  n'est pas bornée. Or,  $B = [-A; A]$  est bornée donc ceci contredit l'hypothèse. Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$$

**Exercice 10**

a) On a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1+h} - 1}{\sqrt{1+h} - 1}$ .

Or :

$$\sqrt[3]{1+h} = (1+h)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}h + o_0(h) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+h} = (1+h)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}h + o_0(h).$$

Donc :

$$\frac{\sqrt[3]{1+h}-1}{\sqrt{1+h}-1} = \frac{\frac{1}{3}h + o_0(h)}{\frac{1}{2}h + o_0(h)} = \frac{\frac{1}{3} + o_0(1)}{\frac{1}{2} + o_0(1)} = \frac{2 + o_0(1)}{3 + o_0(1)}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{3}}$$

b) Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} = 0$ , on a  $1 + \frac{a}{x} > 0$  au voisinage de  $+\infty$ .

On peut donc passer au ln, soit  $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right]$ .

Or, en posant  $h = \frac{a}{x}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{h} \ln(1+h)$  et  $\ln(1+h) = h + o_0(h)$  donc  $\frac{a}{h} \ln(1+h) = a + o_0(1)$  et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = a.$$

La fonction exponentielle étant continue sur  $\mathbb{R}$ , on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a}$$

c) On procède comme ci-dessus :  $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left[\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right] = \exp\left[\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}\right]$ .

Avec  $\ln(1+x) = x + o_0(x)$ , on a  $\ln(1-x) = -x + o_0(x)$  donc :

$$\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(-1 + o_0(1)\right) - \left(1 + o_0(1)\right) = -2 + o_0(1).$$

Et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-2}}$$

d) On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \ln x \frac{\sin(x \ln x)}{x \ln x} \right]$ .

Or, on sait que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$  (par croissances comparées) et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$  donc, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x \ln x)}{x \ln x} = 1.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , on obtient par produit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x} = -\infty}$$

e) On a  $\frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x} = \frac{\ln(\cos x)}{2 - 2\cos^2 x} = \frac{1}{2(1 + \cos x)} \times \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1 + \cos x)} = \frac{1}{4}$ .

De plus, en posant  $h = 1 - \cos x$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1-h)}{h} = -1$ .

Donc, par produit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x} = -\frac{1}{4}}$$

f) On a  $\forall x > 0$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x^2}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}} + 1} \end{aligned}$$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+\sqrt{0+0}}+1}$ , soit :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) = \frac{1}{2}}$$

g) Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x} > 0$ , donc on peut écrire :

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x} = \exp\left[\frac{1}{x} \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = \exp\left[\frac{\ln(\ln x)}{x} - \frac{\ln x}{x}\right].$$

Or, par croissances comparées, on a  $\ln x = o(x)$  et  $\ln(\ln x) = o(\ln x)$  donc  $\ln(\ln x) = o(x)$  (par transitivité).

Alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(\ln x)}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = 0$  et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x} = 1}$$

h) Pour  $x > 0$ , on a  $x^x = e^{x \ln x}$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$ .

Par ailleurs, on peut écrire  $\frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1} = \frac{x^{x^x} x^{-1} \ln x}{x^x - 1} = e^{(x^x - 1) \ln x} \times \frac{\ln x^x}{x^x - 1}$ .

○ En posant  $h = x^x - 1$ , on a,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x^x}{x^x - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ .

○ On a  $(x^x - 1) \ln x = (e^{x \ln x} - 1) \ln x$  et comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ , on a :

$$(x^x - 1) \ln x = (x \ln x + o(x \ln x)) \ln x = x(\ln x)^2 + o(x(\ln x)^2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x - 1) \ln x = 0$$

par croissances comparées.

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1} = 1$$

i)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a  $\sin 3x = \operatorname{Im}[(e^{ix})^3] = \operatorname{Im}[(\cos x + i \sin x)^3] = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ .

De la même façon, on obtient  $\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x$ .

Alors,  $\forall x \neq 0$  :

$$\frac{5 \sin 3x - 3 \sin 5x}{x^3} = \frac{40 \sin^3 x - 48 \sin^5 x}{x^3} = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^3 (40 - 48 \sin^2 x).$$

Et comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ , on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 3x - 3 \sin 5x}{x^3} = 40$$

j) On a  $\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)} = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2}{\ln(\sin^2 x)} = 2 \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(1 - \cos^2 x)} \right)$ .

Posons  $h = \cos^2 x$ . On alors  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{\ln(1-h)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1-h) + 2h}{h \ln(1-h)}$ .

Et  $\ln(1-h) = -h - \frac{1}{2}h^2 + o_0(h^2)$  donc  $\frac{2 \ln(1-h) + 2h}{h \ln(1-h)} = \frac{-h^2 + o_0(h^2)}{-h^2 + o_0(h^2)} = \frac{1 + o_0(1)}{1 + o_0(1)}$  et ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)} \right) = 1$$

### Exercice 11

a) En 0, on a :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$  donc  $e^{1/x} - 1 \underset{0^+}{\sim} e^{1/x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$  donc  $e^{1/x} - 1 \underset{0^-}{\sim} -1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 1} = 1$  donc  $\sqrt{x^2 + 1} \underset{0}{\sim} 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \arctan'(0) = 1$  donc  $\arctan x \underset{0}{\sim} x$

Ainsi :

$$\frac{e^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \arctan x \underset{0^+}{\sim} x e^{1/x} \quad \text{et} \quad \frac{e^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \arctan x \underset{0^+}{\sim} -x$$

En  $+\infty$ , on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$  donc  $e^{1/x} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .
- $\sqrt{x^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} x$ .

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \arctan x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

$$\frac{e^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \arctan x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x^2}$$

b) On a  $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$  donc :

$$\ln(\operatorname{ch} x - 1) = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{2} + o_0(1)\right) = 2 \ln x + \ln\left(\frac{1}{2} + o_0(1)\right).$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \ln x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{2} + o_0(1)\right) = -\ln 2$ , on obtient :

$$\ln(\operatorname{ch} x - 1) \underset{0}{\sim} 2 \ln x$$

$$\text{On } \ln(\operatorname{ch} x - 1) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1\right) = \ln e^x + \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2} - e^{-x}\right) = x + \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2} - e^{-x}\right).$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2} - e^{-x}\right) = -\ln 2$  donc :

$$\ln(\operatorname{ch} x - 1) \underset{+\infty}{\sim} x$$

### Exercice 12

a) La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et clairement paire. Appelons  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(xOy)$ .  $C_f$  est symétrique par rapport à  $(Oy)$ , l'axe des ordonnées du repère.

$\forall x > 0$ , on a :

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{2}x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}.$$

Or,  $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h + o_0(h)$  donc, avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$  :

$$f(x) = x\left[1 + \frac{1}{2x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] - \sqrt{2}x\left[1 + \frac{1}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = (1 - \sqrt{2})x + \frac{1 - \sqrt{2}}{2x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = (1 - \sqrt{2})x + o_{+\infty}(1).$$

Donc, la droite  $D$  d'équation  $y = (1 - \sqrt{2})x$  est asymptote à  $C_f$  en  $+\infty$ .

Par symétrie, la droite  $D'$ , symétrique de  $D$  par rapport à  $(Oy)$ , est asymptote à  $C_f$  en  $-\infty$ . La droite  $D'$  a pour équation  $y = -(1 - \sqrt{2})x$  (même ordonnée à l'origine, pente opposée).

Finalement :

Les droites  $D : y = (1 - \sqrt{2})x$  et  $D' : y = -(1 - \sqrt{2})x$  sont asymptotes à  $C_f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  respectivement.

b) La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et elle aussi est clairement paire. Appelons  $C_g$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(xOy)$ .  $C_g$  est symétrique par rapport à  $(Oy)$ , l'axe des ordonnées du repère.

$\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$g(x) = \ln(\operatorname{ch} x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln e^x + \ln(1 + e^{-2x}) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = x - \ln 2 + o_{+\infty}(1).$$

Donc, la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - \ln 2$  est asymptote à  $C_g$  en  $+\infty$ .

Par symétrie, la droite  $\Delta'$ , symétrique de  $\Delta$  par rapport à  $(Oy)$ , est asymptote à  $C_g$  en  $-\infty$ . La droite  $\Delta'$  a pour équation  $y = -x - \ln 2$  (même ordonnée à l'origine, pente opposée).

Finalement :

Les droites  $\Delta : y = x - \ln 2$  et  $\Delta' : y = -x - \ln 2$  sont asymptotes à  $C_g$  en  $+\infty$  et  $-\infty$  respectivement.

### Exercice 13

Posons  $f(x) = xe^{ix}$ .

On a bien  $|f(x)| = x \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , mais  $\operatorname{Re}(f)(x) = x \cos x$  et  $\operatorname{Im}(f)(x) = x \sin x$  n'ont pas de limite quand  $x \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 14

$\forall n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\forall x \in [n; n+1[$ ,  $E(x) = n$  donc  $f(x) = n + (x - n)^2$ .

- Sur  $]n; n+1[$ ,  $f$  est une fonction polynôme donc elle y est continue. Ainsi,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .
- On a  $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n + (n - n)^2 = n = f(n)$ .

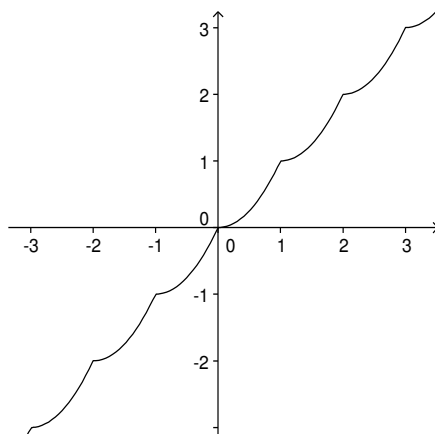
Sur  $]n-1; n[$ , on a  $E(x) = n-1$  donc  $f(x) = n-1 + (x - n + 1)^2$  et  $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n-1 + (n - n + 1)^2 = n$ .

Donc,  $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = f(n)$  et  $f$  est continue en  $n$ . Ainsi,  $f$  est continue sur  $\mathbb{Z}$ .

Finalement :

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Sa courbe représentative a l'allure suivante :



**Exercice 15**

a) Posons  $I = [a, b]$ . Alors,  $f(I) \subset I$  équivaut à  $\forall x \in [a, b], a \leq f(x) \leq b$  et en particulier,  $a \leq f(a)$  et  $f(b) \leq b$ . Posons alors  $g(x) = f(x) - x$ . Comme  $f$  est continue sur  $I$ ,  $g$  aussi avec  $g(a) \geq 0$  et  $g(b) \leq 0$ . Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ .  $c$  est alors un point fixe de  $f$ , donc :

$f$  admet au moins un point fixe.

b) Posons à nouveau  $g(x) = f(x) - x$ . Comme plus haut,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Comme  $f$  et  $x \mapsto -x$  sont décroissantes sur  $\mathbb{R}$ ,  $g$  l'est aussi.

De plus,  $f$  étant décroissante sur  $\mathbb{R}$ , donc :

- Soit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , soit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  est finie. Dans les deux cas, on a alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ .
- Soit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , soit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  est finie. Dans les deux cas, on a alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .

Ainsi,  $g$  est continue et décroissante sur  $\mathbb{R}$  de  $+\infty$  à  $-\infty$  donc le théorème des valeurs intermédiaires assure alors qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $g(c) = 0$ . Ainsi,  $f$  admet au moins un point fixe.

Supposons maintenant que  $f$  admet deux points fixes  $c$  et  $c'$  tels que  $c < c'$ .

Alors, par décroissance de  $f$ , on a  $f(c) \geq f(c')$  et comme  $f(c) = c$  et  $f(c') = c'$ , on a  $c \geq c'$ , ce qui est absurde.

Finalement :

$f$  admet un unique point fixe.

c) Si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ , on a  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ .

En particulier,  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(0)| \leq k|x|$ , soit  $f(0) - k|x| \leq f(x) \leq f(0) + k|x|$ .

Donc  $\forall M > 0$ , on a  $|x| \leq M \Rightarrow f(0) - kM \leq f(x) \leq f(0) + kM$ .

Comme suggéré, cherchons un réel  $M > 0$  tel que  $f([-M, M]) \subset [-M, M]$ , c'est-à-dire tel que  $\forall x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| \leq M$ , on a  $-M \leq f(x) \leq M$ . Avec ce qui précède, il suffit de choisir  $M$  tel que  $-M \leq f(0) - kM$  et  $f(0) + kM \leq M$ , c'est-à-dire tel que  $f(0) \leq (1-k)M$  et  $-f(0) \leq (1-k)M$ , ou encore tel que  $M \geq \frac{|f(0)|}{1-k}$  (car  $k < 1$  donc  $1-k > 0$ ).

Réciproquement, si  $M \geq \frac{|f(0)|}{1-k}$ , on a  $-M \leq f(0) - kM$  et  $f(0) + kM \leq M$  donc  $\forall x \in [-M, M]$  :

$$-M \leq f(0) - kM \leq f(0) - k|x| \leq f(x) \leq f(0) + k|x| \leq f(0) + kM \leq M.$$

Donc  $f([-M, M]) \subset [-M, M]$ . La question a) permet alors de conclure que  $f$  admet au moins un point fixe.

Supposons maintenant que  $f$  admet deux points fixes  $c$  et  $c'$  distincts.

On a alors  $|f(c) - f(c')| \leq k|c - c'|$ , soit avec  $f(c) = c$  et  $f(c') = c'$ ,  $|c - c'| \leq k|c - c'|$ .

Or, si  $c \neq c'$ , on a  $|c - c'| > 0$  donc  $1 \leq k$  ce qui est absurde.

Finalement :

$f$  admet un unique point fixe.

**Exercice 16**

Posons  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

Si  $f$  est constante,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ell$  et tout point correspond à un extremum. Si  $f$  n'est pas constante, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(\alpha) \neq \ell$ .

On a  $\forall \varepsilon > 0$  :

- $\exists A_\varepsilon > 0$  tel que  $\forall x > A_\varepsilon$ ,  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ , soit  $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$  ;
- $\exists B_\varepsilon > 0$  tel que  $\forall x < -B_\varepsilon$ ,  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ , soit  $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ .

Et en posant,  $A = \max(A_\varepsilon, B_\varepsilon)$ , on a  $\forall x \notin [-A, A]$ ,  $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ .

Considérons alors deux cas :

- Si  $f(\alpha) < \ell$ , on pose  $\varepsilon = \ell - f(\alpha) > 0$ . Il existe alors  $\exists A > 0$ , tel que  $\forall x \notin [-A, A]$ ,  $f(\alpha) < f(x)$ . Ceci implique entre autres que  $\forall x \notin [-A, A]$ ,  $f(x) \neq f(\alpha)$  donc  $\alpha \in [-A, A]$ .  
De plus,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[-A, A]$  et  $f([-A, A])$  est un segment. Ceci implique que  $f$  admet un minimum sur  $[-A, A]$ , atteint en  $c \in [-A, A]$ .  
On a alors en particulier,  $f(c) \leq f(\alpha)$  donc  $\forall x \notin [-A, A]$ ,  $f(c) \leq f(\alpha) < f(x)$  et  $\forall x \in [-A, A]$ ,  $f(c) \leq f(x)$ . Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(c) \leq f(x)$  donc  $f$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$ .
- Si  $f(\alpha) > \ell$ , alors  $-f$  vérifie toutes les hypothèses précédentes (elle est continue sur  $\mathbb{R}$ , admet  $-\ell$  pour limite en  $-\infty$  et  $+\infty$  et  $-f(\alpha) < -\ell$ ) donc elle admet un minimum sur  $\mathbb{R}$ , et  $f$  admet un maximum sur  $\mathbb{R}$ .

Finalement, dans tous les cas :

$f$  admet un extremum.

**Exercice 17**

1. Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

- Si  $a \in \mathbb{Q}$ , alors comme  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'irrationnels de limite  $a$ .  
On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\chi_{\mathbb{Q}}(a_n) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(a_n) = 0$ . Mais  $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(a_n) \neq \chi_{\mathbb{Q}}(a)$ , ce qui prouve que  $\chi_{\mathbb{Q}}$  n'est pas continue en  $a$ .
- Si  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , alors comme  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de rationnels de limite  $a$ .  
On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\chi_{\mathbb{Q}}(a_n) = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(a_n) = 1$ . Mais  $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_{\mathbb{Q}}(a_n) \neq \chi_{\mathbb{Q}}(a)$ , ce qui prouve que  $\chi_{\mathbb{Q}}$  n'est pas continue en  $a$ .

Finalement :

$\chi_{\mathbb{Q}}$  est discontinue en tout point de  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $a \in \mathbb{Q}$ .

On a alors, par définition de  $f$ ,  $f(a) \neq 0$ . Or, comme plus haut, il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'irrationnels qui converge vers  $a$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \notin \mathbb{Q}$  donc  $f(a_n) = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 0 \neq f(a)$ . Ainsi,  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

Soit maintenant  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

On a  $f(a) = 0$ . Montrer que  $f$  est continue en  $a$ , revient à montrer que  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ .

Or,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, f(x) = 0$  donc  $\forall \varepsilon > 0, |f(x)| < \varepsilon$  et montrer que  $f$  est continue en  $a$ , revient à montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe un réel } \alpha > 0 \text{ tel que } \forall r \in \mathbb{Q}, |r - a| < \alpha \Rightarrow |f(r)| < \varepsilon.$$

Procédons par analyse-synthèse.

Si  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , avec  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge q = 1$ , on a  $f(r) = \frac{1}{q}$  donc  $|f(r)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{q} < \varepsilon \Leftrightarrow q > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Supposons alors que  $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ . On peut écrire  $q \leq q_0$  avec  $q_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ .

Pour  $q \in \llbracket 1, q_0 \rrbracket$  fixé, posons  $\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \left| \frac{p}{q} - a \right|$ . Comme  $a \notin \mathbb{Q}$ , on a  $\forall p \in \mathbb{N}, a_p > 0$ .

De plus,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} a_p = +\infty$  donc il existe un certain  $p_q \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p \in \mathbb{N}, a_p \geq a_{p_q} > 0$ .

Posons  $\alpha = \min(a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_{q_0}}) > 0$ . On a alors,  $\forall q \in \llbracket 1, q_0 \rrbracket$  et  $\forall p \in \mathbb{N}, a_p \geq \alpha$ .

Ainsi, on a trouvé un réel  $\alpha > 0$ , qui ne dépend que de  $q_0$ , donc que de  $\varepsilon$ , tel que :

$$\forall r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \in \llbracket 1, q_0 \rrbracket \Rightarrow |r - a| = \left| \frac{p}{q} - a \right| \geq \alpha.$$

Ceci implique  $\forall r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  tel que  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge q = 1$ , on  $|r - a| < \alpha \Rightarrow q > q_0$ .

Or,  $q > q_0 \Rightarrow q \geq q_0 + 1 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(r)| = f(r) = \frac{1}{q} < \varepsilon$ .

Tout compris,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tel que  $\forall r \in \mathbb{Q}, |r - a| < \alpha \Rightarrow |f(r)| < \varepsilon$  et ainsi,  $f$  est continue en  $a$ .

Finalement :

$f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et discontinue en tout point de  $\mathbb{Q}$ .

### Exercice 18

a) Soit  $f$  continue et ne s'annulant pas sur un intervalle  $I$ .

Supposons qu'il existe  $(a, b) \in I^2$  tel que  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ . Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $c \in [a, b] \subset I$  ou  $[b, a] \subset I$  tel que  $f(c) = 0$  et donc  $f$  s'annule sur  $I$ , ce qui est absurde.

Donc,  $\forall (a, b) \in I^2, (f(a) > 0 \text{ et } f(b) > 0)$  ou  $(f(a) < 0 \text{ et } f(b) < 0)$ , ce qui prouve que :

$f$  garde un signe constant sur  $I$ .

b) Soit  $f$  continue et prenant un nombre fini de valeurs sur un intervalle  $I$ .

Supposons qu'il existe  $(a, b) \in I^2$  tel que  $a < b$  et  $f(a) \neq f(b)$ . Posons  $J = [f(a), f(b)]$  ou  $[f(b), f(a)]$ . Comme  $f(a) \neq f(b)$ ,  $J$  contient une infinité de valeurs. Or, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\forall y \in J$ , il existe  $x \in [a, b] \subset I$  tel que  $f(x) = y$  et donc  $f$  atteint toutes les valeurs de  $J$ , qui est infini. Ceci contredit le fait que  $f(I)$  est fini, donc  $\forall (a, b) \in I^2, f(a) = f(b)$  et ainsi :

f est constante sur I.

c) Soit  $f$  est  $T$ -périodique sur  $\mathbb{R}$  et admettant une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ .

Supposons qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) \neq \ell$  et posons  $\varepsilon = |f(a) - \ell| > 0$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ,  $\exists A > 0$  tel que  $\forall x > A$ ,  $|f(x) - \ell| < \varepsilon = |f(a) - \ell|$ .

Or, la suite  $(a + nT)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$  donc il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $a + pT > A$  et  $|f(a + pT) - \ell| < |f(a) - \ell|$ .

Mais  $f$  étant  $T$ -périodique, on a  $f(a + pT) = f(a)$  et donc  $|f(a) - \ell| < |f(a) - \ell|$  ce qui est absurde.

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ell$  et donc :

f est constante sur  $\mathbb{R}$ .

Ici, on n'a pas utilisé l'hypothèse de continuité, donc cette hypothèse n'est pas nécessaire.

d) Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $\exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $|a| \neq 1$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(ax) = f(x)$ .

Une récurrence immédiate permet de montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = f(a^n x)$ .

- Si  $|a| < 1$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n x = 0$  et comme  $f$  est continue en 0,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a^n x) = f(0)$ .

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(0)$  donc  $f$  est constante.

- Si  $|a| > 1$ , on a entre autres  $a \neq 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f\left(a \frac{x}{a}\right) = f\left(\frac{x}{a}\right)$ . De plus,  $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} < 1$ .

On peut alors appliquer le raisonnement précédent en remplaçant  $a$  par  $\frac{1}{a}$ , ce qui permet de conclure que dans ce cas aussi,  $f$  est constante.

Finalement, dans tous les cas :

f est constante sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 19

Appelons  $d$  la fonction donnant la distance en km parcourue par le randonneur en fonction du temps  $t$  (exprimée en heures). La fonction  $d$  est définie sur  $[0; 2]$  avec  $d(0) = 0$  et  $d(2) = 12$ . De plus, comme notre randonneur ne pratique pas la téléportation instantanée, la fonction  $d$  est continue sur  $[0; 2]$ .

Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une heure pendant lequel le randonneur a parcouru exactement 6 km, revient à montrer qu'il existe une durée  $T$  telle que  $d(T + 1) = d(T) + 6$ .

Posons alors  $f(t) = d(t + 1) - d(t)$ .

La fonction  $f$  est définie sur  $[0; 1]$  et continue (comme différence de telles fonctions). Le théorème des valeurs intermédiaire assure alors l'existence d'un antécédent pour tout nombre compris entre  $f(0)$  et  $f(1)$  (quel que soit l'ordre de ces deux nombres) et en particulier, pour  $\frac{f(0) + f(1)}{2}$ . Or :

$$\frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{d(1) - d(0) + d(2) - d(1)}{2} = \frac{d(2) - d(0)}{2} = \frac{12 - 0}{2} = 6.$$

Donc, il existe  $T \in [0;1]$ , tel que  $f(T) = \frac{f(0)+f(1)}{2} = 6$ , c'est-à-dire  $d(T+1) = d(T) + 6$  et ainsi :

Il existe bien un intervalle de temps d'une heure pendant lequel le randonneur a parcouru exactement 6 km.

### Exercice 20

Dans un premier temps, supposons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ .

Alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$  tel que  $\forall x \geq A, |f(x+1) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x+1) - f(x) < \varepsilon$ .

$\forall x \geq A$ , posons  $n = E(x - A) \geq 0$ .

On a alors  $n \leq x - A < n + 1 \Leftrightarrow A \leq x - n < A + 1$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$x - k \geq x - n \geq A \Rightarrow -\varepsilon < f(x - k + 1) - f(x - k) < \varepsilon$$

On peut donc écrire, en sommant ces inégalités de  $k = 1$  à  $n$  :

$$-n\varepsilon < \sum_{k=1}^n (f(x - k + 1) - f(x - k)) < n\varepsilon \Leftrightarrow -n\varepsilon < f(x) - f(x - n) < n\varepsilon.$$

Et comme  $x \geq A > 0$ , on peut écrire :

$$-\frac{n}{x}\varepsilon < \frac{f(x) - f(x - n)}{x} < \frac{n}{x}\varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(x - n)}{x} - \frac{n}{x}\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x - n)}{x} + \frac{n}{x}\varepsilon.$$

Or,  $0 \leq n \leq x - A < x$  donc  $0 \leq \frac{n}{x} < 1$  et la double inégalité précédente implique :

$$\frac{f(x - n)}{x} - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x - n)}{x} + \varepsilon \quad \text{(1)}.$$

Enfin, la fonction  $f$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , elle l'est sur le segment  $[A; A + 1]$  et donc elle est bornée sur  $[A; A + 1]$ . Ainsi, il existe  $M > 0$  tel que  $\forall t \in [A; A + 1], -M \leq f(t) \leq M$ .

Or, on a vu que  $A \leq x - n < A + 1$  donc  $-M \leq f(x - n) \leq M$  donc  $-\frac{M}{x} \leq \frac{f(x - n)}{x} \leq \frac{M}{x}$  et le théorème des gendarmes donne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x - n)}{x} = 0$ . Alors,  $\exists A' > 0$  tel que  $\forall x \geq A'$ , on a  $-\varepsilon < \frac{f(x - n)}{x} < \varepsilon$ .

Alors, si  $B = \max(A, A') > 0$ , la double inégalité (1), combinée avec celle ci-dessus donne  $\forall x \geq B$  :

$$-2\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < 2\varepsilon.$$

En résumé, nous venons de prouver que  $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$  tel que  $\forall x \geq B, \left| \frac{f(x)}{x} \right| < 2\varepsilon$ , c'est-à-dire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Si maintenant, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$ , posons  $g(x) = f(x) - \ell x$ . On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$g(x+1) - g(x) = (f(x+1) - \ell(x+1)) - (f(x) - \ell x) = f(x+1) - f(x) - \ell.$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x+1) - g(x)) = 0$  et d'après ce qui précède,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \ell x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \ell = 0$ .

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$$

### Exercice 21

1) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a :

$$f_\lambda(x) = \ln(\lambda - x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln(\lambda - x) = x \Leftrightarrow \lambda = e^x + x.$$

Posons alors  $h(x) = e^x + x$ .

La fonction  $h$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de telles fonctions et  $h'(x) = e^x + 1 > 0$ .

La fonction  $h$  est donc strictement croissante avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ .

Comme  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , elle est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $h$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, tout réel  $\lambda$  possède un unique antécédent  $x_\lambda$  par  $h$  et on a  $h(x_\lambda) = \lambda$  donc  $x_\lambda = h^{-1}(\lambda)$ .

Finalement :

$$\text{L'équation } f_\lambda(x) = 0 \text{ admet une unique solution réelle } g(\lambda) = h^{-1}(\lambda).$$

2) On a vu que  $h$  est une bijection continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc sa réciproque  $g = h^{-1}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

3) On a  $\lim_{-\infty} h = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} h = +\infty$  donc, avec  $g = h^{-1}$ , on a aussi  $\lim_{-\infty} g = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} g = +\infty$ .

Par définition,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\ln(\lambda - g(\lambda)) = g(\lambda) \Leftrightarrow e^{g(\lambda)} + g(\lambda) = \lambda$$

Alors  $g(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$  et pour  $\lambda \neq 1$ , on a  $g(\lambda) \neq 0$  et on peut écrire  $\frac{e^{g(\lambda)}}{g(\lambda)} = \frac{\lambda}{g(\lambda)} - 1$ .

Alors, comme  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} g(\lambda) = +\infty$ , on a  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda}{g(\lambda)} - 1 \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{g(\lambda)}}{g(\lambda)} = +\infty$  ce qui implique que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{g(\lambda)}{\lambda} = 0$ .

Alors, pour  $\lambda > 1$ ,  $\frac{g(\lambda)}{\ln \lambda} = \frac{\ln(\lambda - g(\lambda))}{\ln \lambda} = 1 + \frac{1}{\ln \lambda} \ln \left( 1 - \frac{g(\lambda)}{\lambda} \right)$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{g(\lambda)}{\ln \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{\ln \lambda} \ln \left( 1 - \frac{g(\lambda)}{\lambda} \right) \right] = 1$ ,

soit :

$$g(\lambda) \underset{+\infty}{\sim} \ln \lambda$$

Par ailleurs, pour  $\lambda \neq 1$ ,  $e^{g(\lambda)} + g(\lambda) = \lambda \Rightarrow \frac{g(\lambda)}{\lambda} = 1 - \frac{e^{g(\lambda)}}{\lambda}$ .

Comme  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} g(\lambda) = -\infty$ , on a  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{e^{g(\lambda)}}{\lambda} = 0$ , donc  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{g(\lambda)}{\lambda} = 1$ , soit :

$$g(\lambda) \underset{-\infty}{\sim} \lambda$$

### Exercice 22

a) On a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

La fonction  $f$  est définie, strictement croissante et positive sur  $[-1; +\infty[$ . De plus,  $\forall x \in [-1; 0[$ ,  $x < 0 \leq f(x)$  et  $\forall x \in [0; +\infty[$  :

$$f(x) - x = \sqrt{1+x} - x = \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+x} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} - x \right) \left( x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right).$$

Comme  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ , on a  $f(x) - x$  est du signe opposé à celui de  $x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  sur  $[0; +\infty[$ . Ainsi :

$$f(x) > x \text{ sur } \left[ -1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right], f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } f(x) < x \text{ sur } \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right].$$

*Définition de u :*

- Si  $u_0 < -1$ , alors  $u_1$  n'est pas défini, donc la suite non plus.
- Si  $u_0 \geq -1$ , alors  $u_1$  est défini et  $u_1 \geq 0$  et si  $u_n$  est défini et positif, alors  $u_{n+1}$  est défini et positif, ce qui prouve par récurrence que  $u$  est définie et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq 0$ .

Ainsi :

La suite  $u$  est définie si et seulement si  $u_0 \geq -1$ .

*Variations de u :*

Comme  $f$  est croissante, le sens de variation de  $u$  dépend de la position relative de  $u_0$  et  $u_1 = f(u_0)$ .

- Si  $-1 \leq u_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , on a  $u_1 > u_0$  et donc  $u$  est croissante.
- Si  $u_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , alors  $u_1 < u_0$  et  $u$  est décroissante.
- Si  $u_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , on a  $u_1 = u_0$  et donc  $u$  est constante.

*Limite de u :*

- On a vu que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq 0$  donc  $u$  est minorée (par 0 ou  $u_0$ , le cas échéant) donc si  $u_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , alors  $u$  est décroissante et minorée donc convergente.
- Si  $-1 \leq u_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , prouvons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq u_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .
  - Par hypothèse, l'inégalité est vraie au rang 0.
  - Si  $-1 \leq u_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , alors comme  $f$  est strictement croissante sur  $[-1; +\infty[$ , on a :

$$f(-1) \leq f(u_n) < f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

La propriété est donc initialisée et héréditaire, donc elle est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Alors, si  $-1 \leq u_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , la suite est croissante et majorée par  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  donc convergente.

- Enfin, si  $u_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , la suite est constante donc convergente.

De plus, on a vu que la suite est positive à partir du rang 1, donc sa limite  $\ell$  aussi. Or, la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $f(\ell) = \ell$ , soit  $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Finalement, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ converge vers } \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

b) Posons  $f(x) = \frac{2+x}{1+2x}$ .

$\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  et une récurrence immédiate (menée comme dans la question précédente) prouve  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est défini et positif, donc la suite  $u$  est bien définie.

La fonction  $f$  est rationnelle et définie sur  $\mathbb{R}_+$  donc elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f'(x) = \frac{-3}{(1+2x)^2} < 0$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Par ailleurs,  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) \geq 0$  donc  $f \circ f$  est définie, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$$f \circ f(x) - x = \frac{2 + \frac{2+x}{1+2x}}{1 + 2\frac{2+x}{1+2x}} - x = \frac{4(1-x)(1+x)}{5+4x}.$$

Sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\frac{4(1+x)}{5+4x} > 0$  donc  $f \circ f(x) - x$  est du signe de  $1-x$ , soit le tableau :

$x$	0	1	$+\infty$
$f \circ f(x) - x$	+	0	-

Alors, avec  $f(1) = 1$ ,  $u_1 = f(u_0)$ ,  $u_2 = f \circ f(u_0)$  et  $u_3 = f \circ f(u_1)$ , on a :

- Si  $u_0 = 1$ , la suite  $u$  est constante.
- Si  $0 \leq u_0 < 1$ , on a :
  - $u_2 > u_0$  et la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et une récurrence immédiate prouve qu'elle est majorée donc convergente vers  $\ell$  tel que  $f \circ f(\ell) = \ell$  (car  $f \circ f$  est continue), c'est-à-dire vers 1.
  - $f(u_0) > f(1)$  soit  $u_1 > 1$  donc  $u_3 < u_1$  et la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 0, donc convergente vers  $\ell$  tel que  $f \circ f(\ell) = \ell$  donc vers 1.
- $u_0 > 1$  les rôles de  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont inversés mais elles convergent quand même toutes deux vers 1.

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ converge vers } 1.}$$

*Remarque :* Quand une suite est définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  une fonction homographique (quotient de deux fonctions affines), on peut trouver une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

La méthode est de poser une suite auxiliaire  $v$ , définie par  $v_n = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$  et de choisir  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  de manière à ce

que la suite  $v$  soit géométrique. Dans notre cas, on trouve que si  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ ,  $v$  est géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$

donc  $v_n = v_0 \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ , d'où :

$$u_n = \frac{1 + v_0 \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - v_0 \left(-\frac{1}{3}\right)^n}.$$

