

**DS de Mathématiques n° 4**

**4 heures**

*Calculatrices interdites*

**Exercice 1**

Soient  $E$  un ensemble non vide,  $A$  une partie de  $E$  et les applications :

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E); X \mapsto X \cap A \quad \text{et} \quad g : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E); X \mapsto X \cup A.$$

- 1) Montrer que :  $f$  surjective  $\Leftrightarrow A = E \Leftrightarrow f$  injective.
- 2) Montrer que :  $g$  surjective  $\Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow g$  injective.

**Exercice 2**

Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, notée  $*$ . On suppose en outre qu'il existe  $(a, e) \in E^2$  tel que  $a * e = a$  et que l'application  $\gamma_a : E \rightarrow E; x \mapsto a * x$  est injective.

- 1) Montrer que  $\forall x \in E, e * x = x$ .
- 2) Prouver que s'il existe  $b \in E$  tel que  $a * b = e$ , alors  $a$  et  $b$  commutent.

On suppose maintenant que  $\forall x \in E$ , l'application  $\gamma_x : E \rightarrow E; y \mapsto x * y$  est injective.

Soit  $u \in E$ . On dit que  $x$  est *idempotent* si  $u * u = u$ .

- 3) Montrer que si  $u \in E$  est idempotent, alors  $\forall x \in E, u * x = x$ .
- 4) Prouver que si  $u$  et  $v$  sont deux éléments idempotents distincts de  $E$ , alors il n'existe aucun couple  $(x, y) \in E^2$  tel que  $x * u = y * v$ .
- 5) En déduire que si  $E$  admet un élément neutre alors c'est  $e$  et que  $e$  est le seul élément idempotent de  $E$ .

**Exercice 3**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(2, 1, -1)$ ,  $B(-3, -1, 1)$ , et  $C(1, -1, -1)$ .

- 1) Montrer que  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
- 2) On note  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ . Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite  $(AH)$ .
- 3) Soient  $t \in \mathbb{R}$  et  $S_t$  la sphère de centre  $\Omega_t(1, t, 1-t)$  et de rayon 2.
  - a. Déterminer la ou les valeur(s) de  $t$  telles que  $S_t$  est tangente à  $(ABC)$ .
  - b. Montrer  $S_t \cap (ABC)$  est un cercle si et seulement si  $t \in I$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  que l'on précisera.

- c. Quand il existe, on note  $H_t$  le centre de ce cercle intersection de  $S_t$  et  $(ABC)$ . Déterminer le lieu des points  $H_t$  lorsque  $t$  varie.
- 4) Prouver que les droites  $(AB)$  et  $(OC)$  ne sont pas coplanaires et déterminer une représentation paramétrique de la perpendiculaire commune à  $(AB)$  et  $(OC)$ .
- 5) Déterminer l'ensemble  $\mathcal{L}$  des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{AC}$ .

#### Exercice 4

On cherche à déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continues sur  $\mathbb{R}$ , s'annulant en 0 et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

On note (E) cette équation fonctionnelle.

- 1) Montrer que les fonctions linéaires sont solutions du problème.
- 2) Soit  $f$  une fonction solution du problème. On pose  $f(1) = a$ .
  - a. Montrer que  $f$  est impaire.
  - b. Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f((n+1)x) - f(nx) = f(x)$ .
 

☉ On pourra évaluer  $f((n+2)x) + f(nx)$ .
  - c. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .
  - d. Evaluer alors  $f$  sur  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ , puis  $\mathbb{R}$ .
- 3) En déduire toutes les fonctions vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

#### Exercice 5

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ , croissante et à valeurs dans  $[a, b]$ . On veut montrer que  $f$  possède un point fixe (c'est-à-dire qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = c$ ).

On pose  $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq x\}$ .

- 1) Montrer que  $A$  est non vide et majorée. On pose  $c = \sup(A)$ .
- 2) Montrer que  $f(c) \geq c$ , puis que  $f(c) \leq c$ .
- 3) Conclure.

#### Exercice 6

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Etablir que  $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$ .