TD du Chapitre 13 - Algèbre Linéaire

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et, sauf mention contraire,* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel quelconque.*

Espaces vectoriels

Exercice 1

Soit $E=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. On définit sur E une addition par $(x,y)\oplus(x',y')=(xx',y+y')$ et une multiplication externe par $\lambda\odot(x,y)=(x^\lambda,\lambda y)$. Montrer que $(E,\oplus,\odot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dire si E est un espace vectoriel :

a. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus \forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq 0\}$.

b. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus f$ est de signe constant$\}$.

c. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus f$ est décroissante$\}$.

d. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus f$ est monotone$\}$.

e. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\}$.

f. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\}$.

g. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\}$.

h. $E=\{u\in\mathbb{R}^\mathbb{N} \setminus u_3=0\}$.

i. $E=\{u\in\mathbb{R}^\mathbb{N} \setminus \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+3}=u_n+3\}$.

j. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus f$ est une fonction polynôme admettant 1 pour racine$\}$.

k. $E=\{f\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \setminus f$ est une fonction polynôme n'ayant qu'une racine réelle$\}$.

Exercice 3

Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1) $E\setminus F$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
2) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (ii) $F\cup G=F+G$.
   (iii) $F\subset G$ ou $G\subset F$.
3) A-t-on $F\cap(G+H)=F\cap G+F\cap H$?
4) On suppose que $G\subset H$. Montrer que : ($F+G=F+H$ et $F\cap G=F\cap H$) $\Rightarrow$ $G=H$.
   Cette implication reste-t-elle vraie si on enlève l'hypothèse $G\subset H$?

Applications linéaires

Exercice 4

Etudier la linéarité des applications suivantes :

a. $u_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $(x,y)\mapsto(2x-y^2,x+y,y)$.

b. $u_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$; $(x,y,z)\mapsto(x,x)$.

c. $u_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $(x,y)\mapsto(2x-y,x+\cos y,y)$.

d. $u_4:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $(x,y,z)\mapsto(z,x,y)$.

Exercice 5

Trouver les ensembles :

a) $E_1 = \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, \forall\, x \in E, \big(x, u(x)\big) \text{ est liée}\}$.

b) $E_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, \forall\, v \in GL(E), u \circ v = v \circ u\}$. ☺ *Les symétries sont dans GL(E)…*

Exercice 6

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout f de E, on définit la fonction u(f) par $u(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t) f(t)\,dt$. Montrer que $u : f \mapsto u(f)$ est un endomorphisme injectif mais non surjectif de E.

Exercice 7

Soient f et g deux endomorphismes de E.

1. Prouver que $\ker f = \ker(g \circ f) \iff \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$.
2. On suppose que $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g$. Prouver que :

$$f\big(\ker g\big) = \operatorname{Im} f,\ g\big(\ker f\big) = \operatorname{Im} g \text{ et } \ker(f+g) = \ker f \cap \ker g.$$

3. On suppose maintenant que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$, $f\big(\ker g\big) = \operatorname{Im} f$ et $g\big(\ker f\big) = \operatorname{Im} g$. Prouver que :

$$\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Im} g.$$

Exercice 8

Montrer que toute forme linéaire non nulle sur E est surjective.

Exercice 9

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$. Montrer que $\operatorname{Im} u^2$ et $\ker u$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 10

Soient $u \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = Id$. Résoudre dans E les équations suivantes (d'inconnue x) :

a. $f(x) + x = u$.

b. $f(x) - x = u$. ☺ *On prouvera que* $E = \ker(f - Id) \oplus \operatorname{Im}(f - Id)$, *puis que* $\ker(Id + f + f^2) = \operatorname{Im}(f - Id)$.

Exercice 11

Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que :

a. $p \circ q = 0 \iff \operatorname{Im} q \subset \ker p$.

b. $p \circ q = p \iff \ker q \subset \ker p$.

c. $p + q$ est un projecteur $\iff p \circ q = q \circ p = 0$.

d. $p \circ q$ est un projecteur si $p \circ q = q \circ p$.

Dimension finie

Dans ce qui suit, E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n.

Exercice 12

On pose $E=\mathbb{R}^3$ et $x_1=(1,0,-2)$, $x_2=(3,-1,0)$, $x_3=(1,1,1)$ $x_4=(0,-1,1)$.

1) La famille (x_1,x_2,x_3) est-elle libre ? Si oui, est-ce une base de E ? Dans ce cas, déterminer les coordonnées de x_4 dans cette base ? Si la famille n'est pas libre, exprimer x_3 en fonction de x_1 et x_2.
2) La famille (x_1,x_2,x_3,x_4) est-elle libre ? Si non, exprimer x_4 en fonction de x_1, x_2 et x_3.
3) La famille (x_3,x_4) est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base E.
4) $F=\mathrm{Vect}(x_1,x_2)$ est-il un hyperplan de E ? Si oui, en donner une équation.
5) Soit $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \setminus x+y=y+z=0\}$. Montrer que G est un s.e.v. de E, en donner une base et sa dimension.
6) On définit l'application $f:E\to E\,;(a,b,c)\mapsto(a-b)x_1+(b-c)x_2+(c-a)x_3$. Montrer que f est linéaire. Déterminer son noyau, son image et son rang.

Exercice 13

E est de dimension non nulle. Soient F et G sont deux sous-espaces de E, tous deux différents de E.

a) Montrer que $F\cup G\neq E$.
b) Montrer que si F et G sont des hyperplans, il existe une droite D qui soit un supplémentaire de F et un supplémentaire de G.
c) Plus généralement, prouver que F et G admettent un supplémentaire commun si et seulement si ils ont la même dimension.

Exercice 14

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que les six assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{rg}(f^2)=\mathrm{rg}(f)$	(ii) $\mathrm{Im}\,f^2=\mathrm{Im}\,f$	(iii) $\ker f^2=\ker f$
(iv) $\dim\left(\ker f^2\right)=\dim\left(\ker f\right)$	(v) $\mathrm{Im}\,f\cap\ker f=\{0\}$	(vi) $\mathrm{Im}\,f\oplus\ker f=E$.

Exercice 15

Soient u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$.

a) $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)-n\leq\mathrm{rg}(v\circ u)\leq\inf\left(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v)\right)$.

b) Montrer que $\begin{cases}u\circ v=0\\ u+v\in GL(E)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)=n\\ \ker u=\mathrm{Im}\,v\\ E=\ker u\oplus\mathrm{Im}\,u\end{cases}$.

Exercice 16

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et f et g dans $\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f+g)=\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g=\{0\}\\ \ker f+\ker g=E\end{cases}$$

Exercice 17

Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dimension de E pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = \ker f$.

Exercice 18

Soient F et G sont deux sous-espaces de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \ker f$.

Exercice 19

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg}(u^n) = \operatorname{rg}(u^{n+1})$ (on rappelle que n est la dimension de E).

Exercice 20

E est de dimension non nulle. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$E = \ker f + \ker g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g.$$

Montrer que ces deux sommes sont directes et donner un exemple pour f et g.

Exercice 21

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ admet un supplémentaire dans E stable par f si et seulement si $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$. Dans ces conditions, montrer que ce supplémentaire est unique.

Exercice 22

Soient p et q deux projecteurs de E, tels que $\mathrm{Id} - p - q \in GL(E)$.

Montrer que p, q, pq, qp, pqp et qpq ont le même rang.

Espaces affines

Exercice 23

Soient *F* et *G*, deux sous-espaces affines d'un espace affine E tels que $F \cap G = \varnothing$. Montrer qu'il existe F' et G' deux sous-espaces affines de E tels que $F' \,//\, G'$, $F \subset F'$, $G \subset G'$ et $F' \cap G' = \varnothing$.

Exercice 24

Soient *F* et *G*, deux sous-espaces affines de dimension finie d'un espace affine *E*. On note *H* le sous-espace affine engendré par $F \cup G$ (i.e. le plus petit sous-espace affine de *E* contenant $F \cup G$). Déterminer $\dim H$.

Exercice 25

Soient *F* et *G*, deux sous-espaces affines disjoints d'un espace affine *E*, de dimensions p et m avec $p \le m$. Montrer que *F* est parallèle à *G* si et seulement s'il existe un sous-espace affine *H* de dimension $m+1$ contenant *F* et *G*.