

**TD du Chapitre 14 – Fonctions Numériques**

**Généralités**


---

**Exercice 1**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f \in I^I$  croissante et involutive (c'est-à-dire que  $\forall x \in I, f \circ f(x) = x$ ).

Montrer que  $\forall x \in I, f(x) = x$ .

**Exercice 2**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \circ f$  est croissante et  $f \circ f \circ f$  est strictement décroissante. Montrer que  $f$  est strictement décroissante.

**Exercice 3**

Déterminer les applications  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$ .

**Exercice 4**

Le produit de deux fonctions lipschitziennes est-il lipschitzien ? Et si ces fonctions sont bornées ?

**Exercice 5**

Soit  $f: ]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = (1-x) \sin \frac{\pi}{x}$ . Montrer que  $f$  est bornée et déterminer ses bornes inférieure et supérieure.

**Exercice 6**

Soient  $f \in \mathcal{F}([0; 1], [0; 1])$  croissante et  $E = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \geq x\}$ . Montrer que  $E$  admet une borne supérieure et que cette borne est un point fixe de  $f$ .

**Limites**


---

**Exercice 7**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et  $f(x) = \frac{a}{x} E\left(\frac{x}{b}\right)$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

**Exercice 8**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Etudier l'existence et comparer les valeurs éventuelles

de  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$ .

**Exercice 9**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall B \subset \mathbb{R}, B$  bornée  $\Rightarrow f^{-1}(B)$  bornée. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$ .

**Exercice 10**

Calculer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$  avec  $a \in \mathbb{R}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$       f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$       g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$       h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$
- i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 3x - 3 \sin 5x}{x^3}$       j)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\ln(\sin x)}\right)$  sachant que  $\ln(1-h) = -h - \frac{1}{2}h^2 + o_0(h^2)$ .

**Exercice 11**

Déterminer un équivalent simple au voisinage de 0, puis au voisinage de  $+\infty$  de :

- a)  $\frac{e^{1/x} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \arctan x$ .      b)  $\ln(\operatorname{ch} x - 1)$ .

**Exercice 12**

Etudier les asymptotes éventuelles des courbes représentatives des fonctions :

- a)  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + 4}$ .
- b)  $g : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ .

**Exercice 13**

Existe-t-il une fonction  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  telle que  $|f(x)| \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  mais telle que  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  ne tendent pas vers l'infini en  $+\infty$  ?

**Continuité****Exercice 14**

Etudier la continuité de  $f : x \mapsto E(x) + (x - E(x))^2$  et donner l'allure de sa courbe représentative.

**Exercice 15**

Soit  $f$  une application continue sur un intervalle  $I$ .

- a) Montrer que si  $I$  est un segment et  $f(I) \subset I$  alors  $f$  admet au moins un point fixe.
- b) Montrer que si  $I = \mathbb{R}$  et  $f$  est décroissante, alors  $f$  admet un unique point fixe.
- c) Montrer que si  $I = \mathbb{R}$  et  $f$  est  $k$ -lipschitzienne avec  $0 \leq k < 1$ , alors  $f$  admet un unique point fixe.
- ☺ On pourra prouver l'existence d'un réel  $M > 0$  tel que  $f([-M, M]) \subset [-M, M]$ .

**Exercice 16**

Soit  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  admettant une même limite finie en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Montrer que  $f$  admet un extremum.

**Exercice 17**

1. Montrer que la fonction  $\chi_{\mathbb{Q}}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ , appelée fonction caractéristique ou indicatrice de  $\mathbb{Q}$ , est discontinue en tout point de  $\mathbb{R}$ .
2. Tout nombre rationnel  $x$  s'écrit de manière unique  $x = \frac{p}{q}$ , avec  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $p \wedge q = 1$ . Soit alors la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . Montrer que  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et discontinue en tout point de  $\mathbb{Q}$ .

**Exercice 18**

Soit  $f$  une application continue sur un intervalle  $I$ .

- a) Montrer que si  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors elle garde un signe constant sur  $I$ .
- b) Montrer que si  $f$  prend un nombre fini de valeurs, alors  $f$  est constante.
- c) Montrer que si  $I = \mathbb{R}$  et  $f$  est périodique et admet une limite finie en  $+\infty$ , alors  $f$  est constante. L'hypothèse de continuité est-elle nécessaire ici ?
- d) Montrer que si  $I = \mathbb{R}$  et s'il existe un réel  $a \neq \pm 1$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(ax) = f(x)$ , alors  $f$  est constante.  
 ☺ On pourra commencer par le cas où  $|a| < 1$ .

**Exercice 19**

Un randonneur parcourt 12 km en 2 heures. Sachant que la téléportation instantanée n'existe que dans Star Trek, montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une heure pendant lequel notre randonneur a parcouru exactement 6 km.

**Exercice 20**

Soit  $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ .

☺ On pourra commencer le cas  $\ell = 0$  et s'inspirer de la preuve du théorème de Césaro, vu dans le TD sur les suites numériques et penser à la partie entière.

**Exercice 21**

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_{\lambda}(x) = \ln(\lambda - x) - x$ .

- 1) Etudier  $f_{\lambda}$  pour  $\lambda$  fixé et montrer que l'équation  $f_{\lambda}(x) = 0$  admet une unique solution réelle que l'on notera  $g(\lambda)$ .
- 2) Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante, bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  et continue.
- 3) Déterminer un équivalent simple de  $g(\lambda)$  en  $-\infty$ , puis en  $+\infty$ .

### Exercice 22

Etudier les suites récurrentes suivantes :

a)  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ .

b)  $u_0 \in \mathbb{R}_+$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1+2u_n}$ .

